



Multivariate Verfahren

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

MSc Umweltpsychologie/Mensch-Technik-Interaktion

MSc Psychologie

Prof. Dr. Dirk Ostwald | Wintersemester 2025/2026

(12) Logistische Regression

Anwendungsszenarien

Modellformulierung

Klassifikation

Lernen

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Anwendungsszenarien

Modellformulierung

Klassifikation

Lernen

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Anwendungsszenarien

Klinische Psychologie und Psychotherapie

Vorhersage der Treatmentresponse bei Psychotherapie basierend auf klinischen Tests

- Featurevariablen: $x_1^{(i)}$ BDI-II Wert, $x_2^{(i)}$ Glucorticoidplasmawert
- Targetvariable: $y^{(i)} = 0$ No Treatmentresponse, $y^{(i)} = 1$ Treatmentresponse
- $i = 1, \dots, 60$ Patient:innendatenpunkte (vgl. Peacock et al. (2025))

Umweltpsychologie

Vorhersage der Effektivität einer umweltpsychologischen Intervention basierend auf Kampagnenmerkmalen

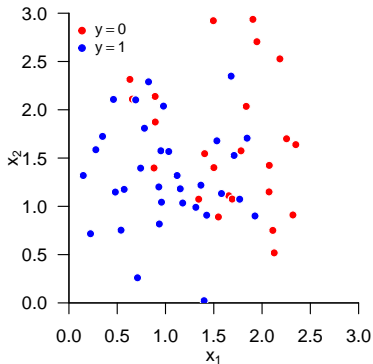
- Featurevariablen: $x_1^{(i)}$ Didaktische Qualität, $x_2^{(i)}$ Emotionalisierung
- Targetvariable: $y^{(i)} = 0$ Geringe Effektivität, $y^{(i)} = 1$ Hohe Effektivität
- $i = 1, \dots, 60$ Kampagnendatenpunkte (vgl. Wein (2025))

Kognitive Neurowissenschaft

Vorhersage eines wahrgenommenen visuellen Bewegungsreizes bei binokulärer Rivalität

- Featurevariablen: $x_1^{(i)}$ BOLD Signal Voxel 1, $x_2^{(i)}$ BOLD Signal Voxel 2
- Targetvariable: $y^{(i)} = 0$ Bewegung nach links, $y^{(i)} = 1$ Bewegung nach rechts
- $i = 1, \dots, 60$ Wahrnehmungsintervalle (vgl. Kamitani & Tong (2006))

Normalisierte Featurevariablenwerte und Targetvariablenwerte



Anwendungsszenarien

Modellformulierung

Klassifikation

Lernen

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Definition (Generalisiertes Lineares Modell)

$x \in \mathbb{R}^{m+1}$ sei ein erweiterter Featurevektor und y das assoziierte Label. Weiterhin sei für einen *Parametervektor* $\beta \in \mathbb{R}^{m+1}$

$$\eta := x^T \beta \quad (1)$$

ein *linearer Prädiktor*. Dann ist ein generalisierte lineares Modell definiert mithilfe einer zweimal differenzierbaren und invertierbaren *Link-Funktion*

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{E}(y) \mapsto g(\mathbb{E}(y)) =: \eta \quad (2)$$

definiert. Die Inverse der Link-Funktion,

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \eta \mapsto g^{-1}(\eta) = \mathbb{E}(y) \quad (3)$$

heißt *Mean-Funktion* und wird mit f bezeichnet, so dass

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \eta \mapsto f(\eta) = \mathbb{E}(y). \quad (4)$$

Definition (ALM als Generalisiertes Lineares Modell)

Das Allgemeine Lineare Modell mit u.i.v. Störvariablen ist das Generalisierte Lineare Modell, bei dem

1. die Labelvariable eine univariat normalverteilte Zufallsvariable

$$y \sim N(\mu, \sigma^2), \quad (5)$$

ist und

2. die Link-Funktion durch die Identität

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mu \mapsto g(\mu) := \mu =: \eta. \quad (6)$$

gegeben ist.

Weil die Inverse der Identität wiederum die Identität ist, folgt, dass die Mean-Funktion des ALM durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \eta \mapsto f(\eta) = \eta = \mu. \quad (7)$$

gegeben ist. Die Parameter des Allgemeinen Linearen Modells sind die Komponenten des Vektors $\beta \in \mathbb{R}^{m+1}$ des linearen Prädiktors $\eta = x^T \beta$ und der Parameter $\sigma^2 > 0$.

Definition (Logistische Regression als Generalisiertes Lineares Modell)

Das Modell der Logistischen Regression (LR) ist das Generalisierte Lineare Modell, bei dem

1. die Labelvariable eine Bernoulli-Zufallsvariable

$$y \sim B(\mu) \tag{8}$$

ist und

2. die Link-Funktion durch die *standard logit function*

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \mu \mapsto g(\mu) := \ln \left(\frac{\mu}{1 - \mu} \right) =: \eta \tag{9}$$

gegeben ist.

Die Parameter des Logistischen Regressionsmodells sind die Komponenten des Vektors $\beta \in \mathbb{R}^{m+1}$ des linearen Prädiktors $\eta = x^T \beta$.

Theorem (Mean-Funktion der Logistischen Regression)

Die Inverse der Link-Funktion des Modells der Logistischen Regression und somit seine Mean-Funktion ist die *Logistische Standardfunktion*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \eta \mapsto f(\eta) = \frac{1}{1 + \exp(-\eta)}. \quad (10)$$

Beweis

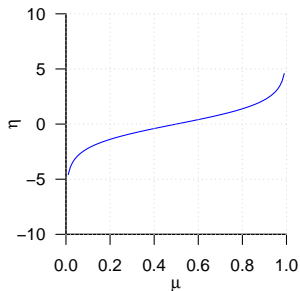
Umformen der standard logit function ergibt

$$\begin{aligned} \eta &= \ln(\mu/(1 - \mu)) \\ \Leftrightarrow -\eta &= -\ln(\mu/(1 - \mu)) \\ \Leftrightarrow -\eta &= \ln((1 - \mu)/\mu) \\ \Leftrightarrow \exp(-\eta) &= (1 - \mu)/\mu \\ \Leftrightarrow \mu \exp(-\eta) &= 1 - \mu \\ \Leftrightarrow \exp(-\eta) &= \mu^{-1} - 1 \\ \mu &= 1/(\exp(-\eta) + 1) \end{aligned}$$

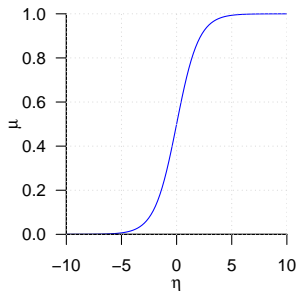
□

Link und Mean Funktionen

$$g(\mu) = \ln(\mu/1-\mu)$$



$$f(\eta) = 1/(1 + \exp(-\eta))$$



Definition (Modell der Logistischen Regression)

y sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$. Dann ist das *Modell der Logistischen Regression* definiert als die WMF von y

$$p(y) = B\left(y; \frac{1}{1 + \exp(-x^T \beta)}\right), \quad (11)$$

wobei $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ einen erweiterten Featurevektor und $\beta \in \mathbb{R}^{m+1}$ den *Parametervektor* bezeichnen

Bemerkung

- Aus generativer Sicht wird ein Trainingsdatensatz

$$\left\{ \left(x^{(i)}, y^{(i)} \right) \right\}_{i=1}^n \quad \text{mit } x^{(i)} \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ und } y^{(i)} \in \{0, 1\} \quad (12)$$

eines LR Modells wie folgt erzeugt:

- (1) Definition von $x^{(i)}$,
- (2) Ziehen von $y^{(i)}$ aus $p(y) = B(y; \mu)$ mit Erwartungswertparameter $\mu = \frac{1}{1 + \exp(-x^{(i)T} \beta)}$.

Datengeneration bei einfacher logistischer Regression für $m = 1, \beta = (-2, 2)^T, n = 30$

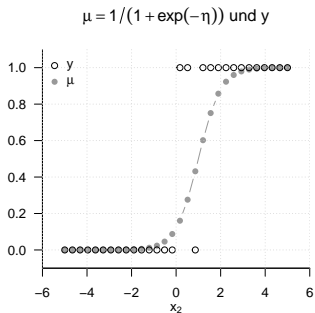
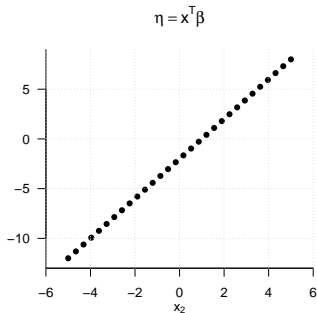
```
# Modellparameter
m   = 1                               # Featurevektoredimensionalität
n   = 30                               # Anzahl Datenpunkte
x   = matrix(c(rep(1,n),
               seq(-5,5, len = n)),
             nrow = 2,
             byrow = TRUE)            # Definition des erweiterten Featurevektors

beta = matrix(c(-2,2), nrow = 2)      # wahrer, aber unbekannter, Parametervektor
eta  = t(x) %*% beta                  # wahrer, aber unbekannter linearer Prädiktor
mu   = 1/(1+exp(-eta))                # wahrer, aber unbekannter, Bernoulli parametervektor

# Datengeneration
set.seed(2)                           # Zufallsgeneratorzustand
y    = rep(NA,n)                       # Datenarray
for(i in 1:n){
  y[i] = rbinom(1,1,mu[i])             # Bernoullivariablenrealisierung
}
```

Modellformulierung

Datengeneration bei einfacher logistischer Regression für $m = 1, \beta = (-2, 2)^T, n = 30$



Anwendungsszenarien

Modellformulierung

Klassifikation

Lernen

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Definition (Klassifikationsregel der Logistischen Regression)

$p(y)$ sei die WMF eines Logistischen Regressionsmodells. Dann ist die *Klassifikationsregel* definiert als

$$\delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto \delta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } p(y=0) \geq p(y=1) \\ 1 & \text{für } p(y=0) < p(y=1) \end{cases} \quad (13)$$

Bemerkung

- Es gilt

$$\delta(x) = 1 \Leftrightarrow p(y=1) > p(y=0) \Leftrightarrow p(y=1) > 0.5. \quad (14)$$

Anwendungsszenarien

Modellformulierung

Klassifikation

Lernen

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Theorem (Log-Likelihood-Funktion der Logistischen Regression)

$\{(x^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^n$ sei ein Trainingsdatensatz aus erweiterten $(m+1)$ -dimensionalen Featurevektoren und assoziierten Labelvariablenrealisierungen und f sei die Logistische Standardfunktion. Dann hat die Log-Likelihood-Funktion der Logistischen Regression die Form

$$\ell : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, \beta \mapsto \ell(\beta) := \sum_{i=1}^n y^{(i)} \ln \left(f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) + (1 - y^{(i)}) \ln \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right).$$

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass für unabhängig und identisch verteilte Labelvariablen gilt, dass

$$\ell(\beta) := \ln p \left(y^{(1)}, \dots, y^{(n)} \right) = \ln \prod_{i=1}^n p \left(y^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^n \ln p \left(y^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^n \ln B \left(y^{(i)}; f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \quad (15)$$

Mit der WMF der Bernoulliverteilung folgt dann

$$\begin{aligned} \ell(\beta) &= \sum_{i=1}^n \ln \left(f \left(x^{(i)T} \beta \right)^{y^{(i)}} \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right)^{1-y^{(i)}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n y^{(i)} \ln \left(f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) + (1 - y^{(i)}) \ln \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

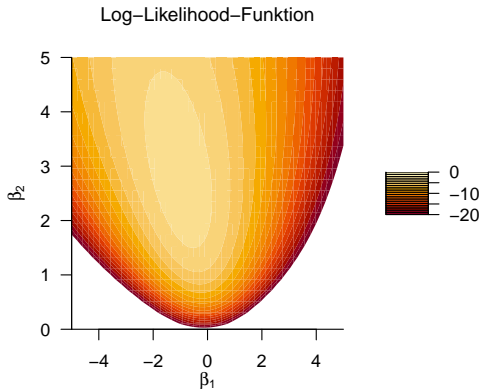
Log-Likelihood-Funktion des generierten Datensatzes für $m = 1, \beta = (-2, 2)^T, n = 30$

```
# Funktionsdefinitionen
# -----
# Standard Logistic Function
f = function(eta){
  return(1/(1 + exp(-eta)))
}

# Log Likelihood Function
llh = function(x,y,beta){
  n = ncol(x)
  ell = 0
  for(i in 1:n){
    ell = ell + y[i]*log(f(t(x[,i]) %% beta)) + (1-y[i])*log(1-f(t(x[,i]) %% beta))
  }
  return(ell)
}

# Log-Likelihood-Funktion Auswertung
# -----
beta_min = -5 # beta Minimum
beta_max = 5 # beta Maximum
beta_res = 5e1 # beta Auflösung
beta_1 = seq(beta_min, beta_max, length.out = beta_res) # beta_1 Raum
beta_2 = seq(beta_min, beta_max, length.out = beta_res) # beta_2 Raum
ell = matrix(rep(NA, beta_res*beta_res), nrow = beta_res) # Log-Likelihood-Funktion Array
for(i in 1:beta_res){
  for(j in 1:beta_res){
    beta12 = matrix(c(beta_1[i], beta_2[j]), nrow = 2)
    ell[i,j] = llh(x,y,beta12)
  }
}
}
```

Log-Likelihood-Funktion des generierten Datensatzes für $m = 1, \beta = (-2, 2)^T, n = 30$



Theorem (Gradientenverfahren der Logistischen Regression)

Gegeben sei das Modell einer Logistischen Regression und $\{(x^{(i)}, y^{(i)})\}_{i=1}^n$ sei ein entsprechender Trainingsdatensatz. Dann kann ein Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\beta}$ für den Parametervektor β des Logistischen Regressionsmodell durch folgendes Gradientenverfahren gewonnen werden:

(0) Wähle $\beta^0 \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$

(1) Für $k = 0, 1, 2, \dots$ bis zur Konvergenz setze

$$\beta^{(k+1)} := \beta^{(k)} + \alpha \nabla \ell(\beta^{(k)}). \quad (17)$$

wobei $\nabla \ell(\beta^k) \in \mathbb{R}^{m+1}$ den Gradienten

$$\nabla \ell(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \ell(\beta) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_{m+1}} \ell(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - f(x^{(i)T} \beta)) x_1^{(i)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - f(x^{(i)T} \beta)) x_{m+1}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

der Log-Likelihood-Funktion der Logistischen Regression bezeichnet

Bemerkungen

- Das reine Gradientenverfahren zum Lernen der Parameter eines LR Modells ist recht instabil.
- Iteratively Weighted Least Squares Verfahren werden zur ML Schätzung in GLMs bevorzugt (Green (1984)).
- IWLS Verfahren nutzen Gradienten und Hesse-Matrix ähnlich wie Gauss-Newton Verfahren.
- R implementiert in der `glm()` ein IWLS Verfahren.

Lernen

Beweis

Um die j te partielle Ableitung der Log-Likelihood-Funktion zu bestimmen, halten wir zunächst fest, dass sich die Ableitung der logistic function f hinsichtlich η zu

$$\frac{d}{d\eta} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \eta \mapsto \frac{d}{d\eta} f(\eta) = f(\eta)(1 - f(\eta)) \quad (19)$$

ergibt. Dies kann wie folgt eingesehen werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} f(\eta) &= \frac{d}{d\eta} (1 + \exp(-\eta))^{-1} \\ &= -(1 + \exp(-\eta))^{-2} \cdot \exp(-\eta) \cdot (-1) \\ &= \frac{\exp(-\eta)}{(1 + \exp(-\eta))^2} \\ &= \frac{1 + \exp(-\eta) - 1}{(1 + \exp(-\eta))^2} \\ &= \frac{1 + \exp(-\eta)}{(1 + \exp(-\eta))^2} - \frac{1}{(1 + \exp(-\eta))^2} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-\eta)} - \frac{1}{(1 + \exp(-\eta))^2} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(-\eta)} \left(1 - \frac{1}{1 + \exp(-\eta)} \right) \\ &= f(\eta)(1 - f(\eta)) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann für $\frac{\partial}{\partial \beta_j} \ell, j = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta_j} \ell(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\sum_{i=1}^n y^{(i)} \ln \left(f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) + (1 - y^{(i)}) \ln \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n y^{(i)} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\ln \left(f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \right) + (1 - y^{(i)}) \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\ln \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n y^{(i)} \frac{1}{f \left(x^{(i)T} \beta \right)} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \right) + (1 - y^{(i)}) \frac{1}{1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right)} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} \frac{1}{f \left(x^{(i)T} \beta \right)} - (1 - y^{(i)}) \frac{1}{1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right)} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} \frac{1}{f \left(x^{(i)T} \beta \right)} - (1 - y^{(i)}) \frac{1}{1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right)} \right) f \left(x^{(i)T} \beta \right) \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(x^{(i)T} \beta \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} \frac{1}{f \left(x^{(i)T} \beta \right)} - (1 - y^{(i)}) \frac{1}{1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right)} \right) f \left(x^{(i)T} \beta \right) \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) x_j^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} \frac{f \left(x^{(i)T} \beta \right) \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right)}{f \left(x^{(i)T} \beta \right)} - (1 - y^{(i)}) \frac{f \left(x^{(i)T} \beta \right) \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right)}{1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right)} \right) x_j^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} \left(1 - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) - (1 - y^{(i)}) f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) x_j^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} - y^{(i)} f \left(x^{(i)T} \beta \right) - f \left(x^{(i)T} \beta \right) + y^{(i)} f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) x_j^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(y^{(i)} - f \left(x^{(i)T} \beta \right) \right) x_j^{(i)}.
\end{aligned}$$

Theorem (Matrixdarstellung des Gradienten der Logistischen Regression)

Es seien $X \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$ die Matrix der zeilenweise konkatenierten transponierten erweiterten Featurevektoren $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{m+1}$, $i = 1, \dots, n$, $y \in \mathbb{R}^n$ sei der Vektor der zugehörigen Labelvariablenrealisierungen $y^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei die multivariate, vektorwertige, elementweise evaluierte Version der Mean-Funktion der logistischen Regression. Dann kann der Gradient der Log-Likelihood-Funktion der Logistischen Regression geschrieben werden als

$$\nabla \ell(\beta) = X^T(y - f(X\beta)). \quad (20)$$

Beweis

Die Aussage ergibt sich durch Anwendung der Matrixsubtraktion und Matrixmultiplikation.



Parameterlernen dem Gradientenverfahren in R

```
# Funktionsdefinitionen
# -----
f = function(eta){
  return(1/(1 + exp(-eta)))
}
# Mean-Funktion der logistischen Regression

nabla_1 = function(beta, X, y){
  return(as.matrix(t(X) %*% (y - f(X %*% beta))))
}
# Gradient der Log-Likelihood Function

# Gradientenverfahren
# -----
y      = matrix(y, ncol = 1)      # n x 1   Form der Labelvariable
X      = t(x)                    # n x (m+1) Form der erweiterten Featurevektoren
alpha  = 1e-1                    # Lernrate
delta  = 1e-2                    # Konvergenzkriterium
beta_hat_k = matrix(c(.61,.85), nrow = 2) # Zufälliger Startpunkt in [0,1]^2
while(norm(nabla_1(beta_hat_k, X, y)) > delta){
  beta_hat_k = beta_hat_k + alpha*(nabla_1(beta_hat_k, X, y)) # Parameterschätzerupdate
}
```

Parametervektorschätzer

```
      [,1]
[1,] -0.908221
[2,]  2.643227
```

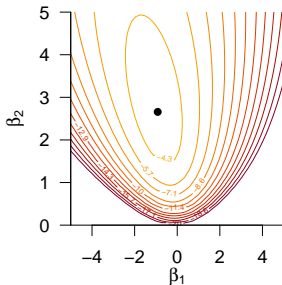
Parameterlernen mit dem IWLS Verfahren in R

```
lr      = glm(y ~ x[2,], family = 'binomial')      # generalized linear model fit  
beta_hat = lr$coefficients                        # Parametervektorschätzer
```

Parametervektorschätzer

```
(Intercept)      x[2, ]  
-0.9164871      2.6578063
```

Parametervektorschätzer



Anwendungsszenarien

Modellformulierung

Klassifikation

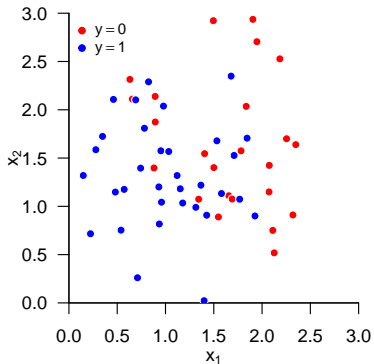
Lernen

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Anwendungsbeispiel

Normalisierte Featurevariablenwerte und Targetvariablenwerte



Normalisierte Featurevariablenwerte und Targetvariablenwerte

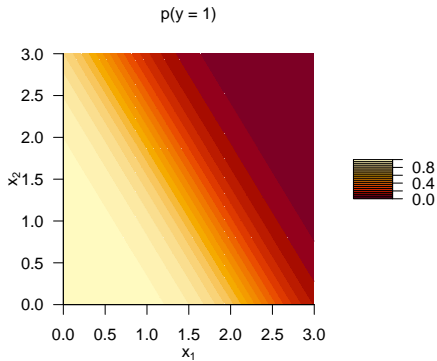
x_1	x_2	y
0.74	1.40	1
0.22	0.72	1
0.82	2.29	1
2.07	1.15	0
1.71	1.53	1
1.77	1.07	1
1.95	2.70	0
2.18	2.53	0
0.93	1.20	1
1.34	1.07	0
2.35	1.64	0
1.43	0.91	1
1.66	1.11	0
0.28	1.59	1
2.13	0.52	0
1.37	1.22	1
0.89	2.14	0
0.88	1.40	0
0.98	2.04	1
1.93	0.90	1

Evaluation von $p(y = 1)$

```
D      = read.csv("12-Daten/12-klassifikationsdatensatz.csv")      # Datensatz
x      = t(D[,1:2])      # Featurevektoren
y      = t(D[,3])      # Label
n      = ncol(x)      # n
m      = nrow(x)      # m
lr     = glm(t(y) ~ t(x), family = 'binomial')      # IWLS Parameterlernen
beta_hat = as.matrix(lr$coefficients, nrow = m + 1)      # Parameterschätzer
x_min  = 0      # x_1/x_2 Minimum
x_max  = 3      # x_1/x_2 Maximum
x_res  = 5e2      # x_1/x_2 Auflösung
x_1    = seq(x_min, x_max, length.out = x_res)      # x_1
x_2    = seq(x_min, x_max, length.out = x_res)      # x_2
p_y    = matrix(rep(NA, x_res*x_res), nrow = x_res)      # p_{(x_1, x_2)}(y=1)
for(i in 1:x_res){      # x_1 Iterationen
  for(j in 1:x_res){      # x_2 Iterationen
    x_tilde = rbind(1, x_1[i], x_2[j])      # \tilde{x}
    p_y[i,j] = 1/(1+exp(-t(x_tilde) %*% beta_hat))      # p_{(x_1, x_2)}(y=1)
  }
}
```

Anwendungsbeispiel

Evaluation von $p(y = 1)$



LOOCV zur Bestimmung der Featureprädiktivität

```
D      = read.csv("12-Daten/12-klassifikationsdatensatz.csv")
K      = nrow(D)
p_y    = matrix(rep(NaN, K) , nrow = 1)
y_pred = matrix(rep(NaN, K*2), nrow = K)

for(k in 1:K){
  x_train = t(D[-k,1:2])
  y_train = t(D[-k,3 ])
  x_test  = t(D[ k,1:2])
  y_pred[k,1] = t(D[ k,3])
  n        = ncol(x_train)
  m        = nrow(x_train)
  lr       = glm(t(y_train) - t(x_train), family = 'binomial')
  beta_hat = as.matrix(lr$coefficients, nrow = m + 1)
  x_test_tilde = rbind(1, x_test)
  p_y[k]      = 1/(1+exp(-t(x_test_tilde) %*% beta_hat))
  y_pred[k,2] = as.numeric(p_y[k] >= 0.5)
}

rp      = sum(y_pred[y_pred[,1] == 1,2] == 1)
rn      = sum(y_pred[y_pred[,1] == 0,2] == 0)
fp      = sum(y_pred[y_pred[,1] == 0,2] == 1)
fn      = sum(y_pred[y_pred[,1] == 1,2] == 0)
ACC     = (rp+rn)/(rp+fp+rn+fn)
SEN     = rp/(rp+fn)
SPE     = rn/(rn+fp)
```

Datensatz
Anzahl Cross Folds
p(y = 1)
Prädiktionsperformancearray
K-fold LOOCV
Trainingsdatensatzfeatures
Trainingsdatensatzlabels
Testdatensatzfeaturevektor
Testdatensatzfeaturevektorlabel
n
m
IWLS Parameterlernen
Parameterschätzer
erweiterter Featurevektor
p(y)
Klassifikationsregel \delta

|(1,1)|
|(0,0)|
|(0,1)|
|(1,0)|
Accuracy
Sensitivity
Specificity

Accuracy : 0.72 , Sensitivity: 0.82 , Specificity: 0.58

Anwendungsszenarien

Modellformulierung

Klassifikation

Lernen

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition des Generalisierten Linearen Modells wieder.
2. Geben Sie die Definition der Logistischen Regression als Generalisiertes Lineares Modells wieder.
3. Geben Sie das Theorem zur Mean-Funktion der Logistischen Regression wieder.
4. Geben Sie die Definition des Modells der Logistischen Regression wieder.
5. Erläutern Sie die Generation von Daten unter dem Modell der Logistischen Regression.
6. Geben Sie die Definition der Klassifikationsregel der Logistischen Regression wieder.

- Green, P. J. (1984). Iteratively Reweighted Least Squares for Maximum Likelihood Estimation, and Some Robust and Resistant Alternatives. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 46(2), 149–170. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1984.tb01288.x>
- Kamitani, Y., & Tong, F. (2006). Decoding Seen and Attended Motion Directions from Activity in the Human Visual Cortex. *Current Biology*, 16(11), 1096–1102. <https://doi.org/10.1016/j.cub.2006.04.003>
- Peacock, S. M., Goodwin, I. H., Wood, R. K., McBride, C. J., Brock, A. C., Erekson, D. M., & Boyd, Z. M. (2025). MATCH: Client-therapist matching with machine learning. *Psychotherapy Research*. <https://doi.org/10.1080/10503307.2025.2599248>
- Wein, E. F. (2025). *Künstliche Intelligenz und Maschinelles Lernen in Umweltbehörden – Potenziale, Herausforderungen und Handlungsempfehlungen*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26391.69280>