Multivariate Verfahren

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

MSc Umweltpsychologie/Mensch-Technik-Interaktion

MSc Psychologie

Joram Soch | Wintersemester 2025/2026

(6) Multivariate Varianzanalyse

Datenanalyseverfahren

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	Einstichproben-T-Test	Einstichproben-T^2-Test
$p = 2$	Zweistichproben-T-Test	Zweistichproben-T^2-Test
$p \geq 3$	einfaktorielle Varianzanalyse	einfaktorielle multivariate Varianzanalyse
$p = I \times J$	zweifaktorielle Varianzanalyse	zweifaktorielle multivariate Varianzanalyse

Übersicht

Datenanalyseverfahren

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	Einstichproben-T-Test	Einstichproben-T^2-Test
$p = 2$	Zweistichproben-T-Test	Zweistichproben-T^2-Test
$p \geq 3$	**einfaktorielle Varianzanalyse**	einfaktorielle multivariate Varianzanalyse
$p = I \times J$	zweifaktorielle Varianzanalyse	zweifaktorielle multivariate Varianzanalyse

Datenanalyseverfahren

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	Einstichproben-T-Test	Einstichproben-T^2-Test
$p = 2$	Zweistichproben-T-Test	Zweistichproben-T^2-Test
$p \geq 3$	einfaktorielle Varianzanalyse	**einfaktorielle multivariate Varianzanalyse**
$p = I \times J$	zweifaktorielle Varianzanalyse	zweifaktorielle multivariate Varianzanalyse

Anwendungsszenario und Datendeskription

Modellformulierung und Modellschätzung

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Zusammenfassung

Selbstkontrollfragen

Anwendungsszenario und Datendeskription

Modellformulierung und Modellschätzung

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Zusammenfassung

Selbstkontrollfragen

Anwendungsszenario und Datendeskription

Anwendungsszenario

- zwei oder mehr Gruppen experimenteller Einheiten mit Datendimension $m > 1$
- Annahme der unabhängigen und identischen Normalverteilung $N(\mu_i, \Sigma)$ der Daten
- $\mu_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, ..., p$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pd. unbekannt
- Absicht des inferentiellen Testens der Nullhypothese identischer Gruppenerwartungswerte

$\Rightarrow$ Generalisierung der einfaktoriellen Varianzanalyse
auf mehr als eine Datendimension

$\Rightarrow$ Generalisierung des Zweistichproben-T^2-Tests
für mehr als zwei Stichproben

Anwendungsbeispiel

- Analyse von Daten dreier Therapiegruppen (F2F, ONL, WLC) von `dBDI` und `dGLU` Daten
- Testen der Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

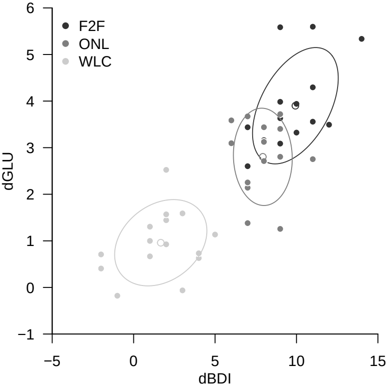
Anwendungsszenario und Datendeskription

Table 1: Differenzwerte für BDI-II-Score und Glukokortikoidplasmalevel prä/post Intervention von drei Studiengruppen (F2F: Face-to-Face, ONL: Online-Therapie, WLC: waitlist control) mit jeweils 15 Patient:innen. Die Tabelle zeigt exemplarisch die ersten fünf Datenpunkte jeder Gruppe.

	COND	dBDI	dGLU
1	F2F	11	4.3
2	F2F	10	3.9
3	F2F	12	3.5
4	F2F	7	2.6
5	F2F	10	3.3
16	ONL	6	3.1
17	ONL	8	2.7
18	ONL	7	2.1
19	ONL	8	3.1
20	ONL	11	2.8
31	WLC	-2	0.7
32	WLC	2	1.4
33	WLC	1	1.0
34	WLC	2	0.9
35	WLC	3	1.6

Anwendungsszenario und Datendeskription

Anwendungsbeispiel



Anwendungsszenario und Datendeskription

Modellformulierung und Modellschätzung

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Zusammenfassung

Selbstkontrollfragen

Definition (Modell der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse)

Für $i = 1, ..., p$ und $j = 1, ..., n_i$ seien y_{ij} m-dimensionale Zufallsvektoren, die die $n := \sum_{i=1}^{p} n_i$ m-dimensionalen Datenpunkte eines einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyseszenarios modellieren. Dann hat das Modell der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse die strukturelle Form

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0_m, \Sigma) \quad \text{u.i.v. mit} \quad \mu_i \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ pd.} \tag{1}$$

und die Datenverteilungsform

$$y_{ij} \sim N(\mu_i, \Sigma) \quad \text{u.v. mit} \quad \mu_i \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ pd.} \tag{2}$$

Bemerkungen

- Bei gleicher Anzahl von Datenpunkten in allen Gruppen wird von einem balancierten Szenario (oder einer balancierten einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse) gesprochen. In diesem Fall bezeichnen wir die identischen Gruppengrößen mit $k := n_i$, $i = 1, ..., p$ (siehe unten).
- Die Datenmatrix der Gesamtheit aller Datenpunkte ergibt sich als

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n_1} & y_{21} & \cdots & y_{2n_2} & \cdots & y_{p1} & \cdots & y_{pn_p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} . \tag{3}$$

Theorem (Parameterschätzer)

Gegeben sei das Modell der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse. Dann ist für $i = 1, ..., p$

$$\hat{\mu}_i := \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \tag{4}$$

ein unverzerrte Schätzer des gruppenspezifischen Erwartungswertparameters μ_i und

$$\hat{\Sigma} := \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \hat{\mu}_i\right)\left(y_{ij} - \hat{\mu}_i\right)^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

ein unverzerrter Schätzer des Kovarianzmatrixparameters Σ.

Bemerkungen

- $\hat{\mu}_i$ ist das Stichprobenmittel der $i$ten Gruppe.
- $\hat{\Sigma}$ ist die mit $1/(n-p)$ skalierte *within-group sum-of-squares* Matrix (siehe unten).
- Wir verzichten auf einen Beweis. Das Theorem lässt sich mithilfe einer Simulation validieren.

Anwendungsszenario und Datendeskription

Modellformulierung und Modellschätzung

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Zusammenfassung

Selbstkontrollfragen

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Überblick

- Ziel einer einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse ist meist das Testen der Nullhypothese

$$H_0 : \mu_1 = ... = \mu_p. \tag{6}$$

- Es ergibt sich damit die Alternativhypothese

$$\begin{aligned} H_1 : \mu_{i_l} \neq \mu_{j_l} \quad & \text{für mindestens ein Paar} \quad i,j \quad \text{mit} \quad i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq p \\ & \text{und mindestens ein} \quad l \quad \text{mit} \quad 1 \leq l \leq m. \end{aligned} \tag{7}$$

- Zur Evaluation von H_0 wurden eine Reihe von Teststatistiken vorgeschlagen.
- Alle Teststatistiken beruhen auf der multivariaten Quadratsummenzerlegung.
- Wir betrachten hier exemplarisch die Wilks'-Λ-Statistik.
- Die Verteilungen der Wilks'-Λ-Statistik unter der Nullhypothese sind zum Teil analytisch angebbar, zum Teil müssen sie approximiert werden und haben dann die Form von f-Verteilungen.

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Theorem (Multivariate Quadratsummenzerlegung)

Für $i = 1, ..., p$ und $j = 1, ..., n_i$ bezeichne y_{ij} den $j$ten Stichprobenvektor der $i$ten Stichprobengruppe eines Modells der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse. Weiterhin seien

$$\bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad \text{und} \quad \bar{y}_i := \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \tag{8}$$

das *Gesamtstichprobenmittel* bzw. das i*te Gruppenstichprobenmittel*. Schließlich seien

$T := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}\right)\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^{\mathrm{T}}$ die *total sum-of-squares Matrix*

$B := \sum_{i=1}^{p} n_i \left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^{\mathrm{T}}$ die *between-group sum-of-squares Matrix*

$W := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^{\mathrm{T}}$ die *within-group sum-of-squares Matrix*.

Dann gilt

$$T = B + W. \tag{9}$$

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Bemerkungen

- $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ misst die totale Variabilität der Datenvektoren um das Gesamtstichprobenmittel.
- $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ misst die Variabilität der Gruppenstichprobenmittel um das Gesamtstichprobenmittel.
- $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ misst die Variabilität der Datenvektoren um ihre jeweiligen Gruppenstichprobenmittel.
- W heißt auch *Residualvariabiliät*, weil sie die verbleibende Variabilität nach Schätzung der Gruppenerwartungswertparameter quantifiziert und weil gilt:
$$W = (n-p)\,\hat{\Sigma}. \tag{10}$$
- Die totale Variabilität (T) wird hier also in zwei unabhängige Beiträge von Variabilität (B, W) zerlegt.
- Ein Beweis ergibt sich durch algebraische Umformung.

<u>Beweis</u>

Wir führen den Beweis, indem wir die Matrix T ausformulieren:

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})(y_{ij}-\bar{y})^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i+\bar{y}_i-\bar{y})(y_{ij}-\bar{y}_i+\bar{y}_i-\bar{y})^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\big((y_{ij}-\bar{y}_i)+(\bar{y}_i-\bar{y})\big)\big((y_{ij}-\bar{y}_i)+(\bar{y}_i-\bar{y})\big)^{\mathrm{T}} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}\big((y_{ij}-\bar{y}_i)(y_{ij}-\bar{y}_i)^{\mathrm{T}}+2(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{y}_i-\bar{y})^{\mathrm{T}}+(\bar{y}_i-\bar{y})(\bar{y}_i-\bar{y})^{\mathrm{T}}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)(y_{ij}-\bar{y}_i)^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{n_i}2(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{y}_i-\bar{y})^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_i-\bar{y})(\bar{y}_i-\bar{y})^{\mathrm{T}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)(y_{ij}-\bar{y}_i)^{\mathrm{T}}+2\left(\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)\right)(\bar{y}_i-\bar{y})^{\mathrm{T}}+n_i(\bar{y}_i-\bar{y})(\bar{y}_i-\bar{y})^{\mathrm{T}}\right)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Beweis

So ergibt sich schließlich die Summe $B + W$:

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^{\mathrm{T}} + 2 \left(\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i) \right) (\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} + n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^{\mathrm{T}} + 2 \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left(y_{ij} - \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \right) \right) (\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} + n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^{\mathrm{T}} + 2 \left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \right) (\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} + n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^{\mathrm{T}} + n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} n_i (\bar{y}_i - \bar{y})(\bar{y}_i - \bar{y})^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)^{\mathrm{T}} \\
&= B + W.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$\square$

Definition (Wilks'-Λ-Statistik)

Es seien das Modell der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse sowie die *between-group sum-of-squares* Matrix B und die *within-group sum-of-squares* Matrix W definiert wie oben. Dann ist die Wilks'-Λ-Teststatistik definiert als

$$\Lambda := \frac{|W|}{|B+W|}, \tag{13}$$

wobei $|\cdot|$ die Determinante bezeichnet.

Bemerkungen

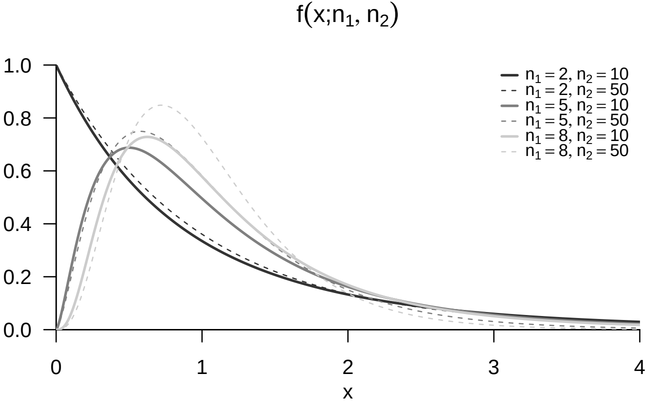
- Intuitiv misst Λ das Verhältnis von Residualvariabilität und Gesamtvariabilität.
- Ohne Beweis halten wir fest, dass $\Lambda \in [0,1]$.
- Für $\bar{y}_1 = ... = \bar{y}_p = \bar{y}$ gilt $B = 0_{mm}$ und damit $\Lambda = 1$.
- Für steigende Unterschiede zwischen den $\bar{y}_i$ nimmt $|B+W|$ gegenüber $|W|$ zu, Λ also ab.
- Kleine Werte von Λ sprechen also für eine Abweichung von der Nullhypothese.

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Bezeichnungskonventionen für f-Zufallsvariablen

- Eine f-Verteilung ist charakterisiert durch Freiheitsgradparameter n_1 und n_2.
- Für eine f-verteilte Zufallsvariable ($=$ f-Zufallsvariable) ξ schreiben wir $\xi \sim f(n_1, n_2)$.
- Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) einer f-Zufallsvariable ist $f(x; n_1, n_2)$.
- Die kumulative Verteilungsfunktion (KVF) einer f-Zufallsvariable ist $F(x; n_1, n_2)$.
- Die inverse KVF einer f-Zufallsvariable bezeichnen wir mit $F^{-1}(x; n_1, n_2)$.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von f-Verteilungen



Theorem (Spezielle H_0-Verteilungen von Λ-Transformationen)

Es seien das Modell der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse und die Wilks'-Λ-Statistik definiert wie oben und es gelte außerdem

$$H_0 : \mu_1 = ... = \mu_p. \tag{14}$$

Dann sind für die in den ersten beiden Tabellenspalten aufgeführten Spezialfälle die in der dritten Tabellenspalte aufgeführten Statistiken f-Zufallsvariablen und zwar mit den in der vierten Tabellenspalte aufgeführten Parametern:

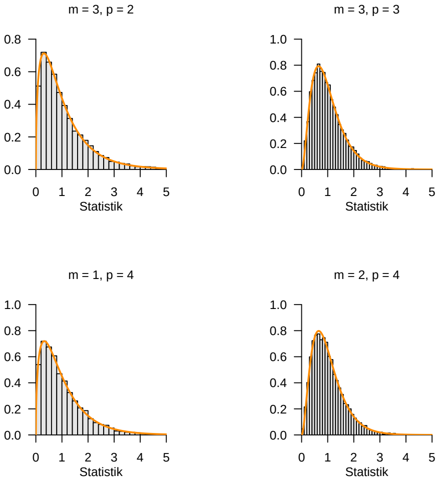
Datendimension m	Gruppenanzahl p	Statistik	f-Verteilungsparameter
beliebig	2	$\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\frac{n-p-m+1}{m}$	$m,\ n-p-m+1$
beliebig	3	$\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\frac{n-p-m+1}{m}$	$2m,\ 2(n-p-m+1)$
1	beliebig	$\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\frac{n-p}{p-1}$	$p-1,\ n-p$
2	beliebig	$\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\frac{n-p-1}{p-1}$	$2(p-1),\ 2(n-p-1)$

Bemerkungen

- Die Verteilungen gehen zurück auf Wilks (1932).

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Simulation spezieller H_0-Verteilungen von Transformationen der Wilks'-Λ-Statistik



Theorem (Approximative H_0-Verteilungen von Λ-Transformationen)

Es seien das Modell der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse und die Wilks'-Λ-Statistik definiert wie oben und es gelte außerdem

$$H_0 : \mu_1 = ... = \mu_p. \tag{15}$$

Dann ist die Statistik

$$\tau := \frac{1 - \Lambda^{1/t}}{\Lambda^{1/t}} \frac{\nu_2}{\nu_1} \tag{16}$$

mit

$$\nu_1 := m(p-1) \quad \text{und} \quad \nu_2 := wt - \frac{1}{2}(m(p-1) - 2) \tag{17}$$

sowie

$$w := n - 1 - \frac{1}{2}(m + p) \quad \text{und} \quad t := \sqrt{\frac{m^2(p-1)^2 - 4}{m^2 + (p-1)^2 - 5}} \tag{18}$$

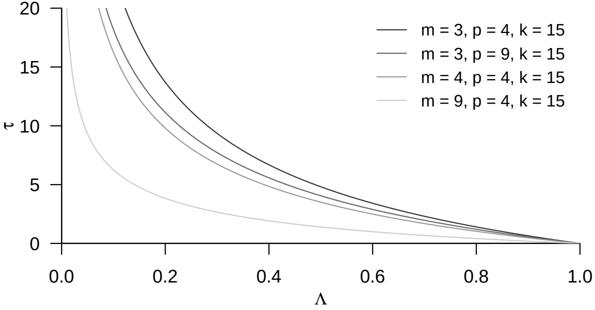
approximativ f-verteilt mit Freiheitsgradparametern ν_1 und ν_2.

Bemerkungen

- Die Approximation geht zurück auf Rao (1951).

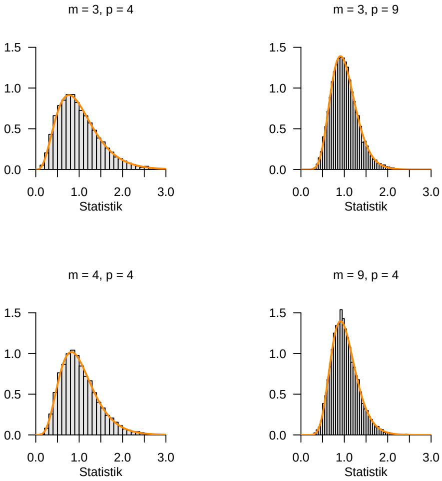
Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

τ als Funktion von Λ: $\quad \Lambda \downarrow \quad \Rightarrow \quad \tau \uparrow$



Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Simulation approximativer H_0-Verteilungen von Transformationen der Wilks'-Λ-Statistik



Theorem (Wilks'-Λ-Statistik-basierter Test)

Es seien das Modell der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse und die Wilks'-Λ-Statistik basierte Teststatistik τ mit Verteilungsparametern ν_1, ν_2 wie oben definiert. Weiterhin sei der kritische-Wert-basierte Test definiert als

$$\phi(Y) := 1_{\{\tau > k\}} := \begin{cases} 1 & \tau > k \\ 0 & \tau \le k \end{cases} \tag{19}$$

ϕ ist genau dann ein Level-α_0-Test mit Testumfang α_0, wenn

$$k := k_{\alpha_0} := F^{-1}(1 - \alpha_0; \nu_1, \nu_2) \tag{20}$$

ist und der p-Wert einer realisiertern τ-Teststatistik $\tilde{\tau}$ ergibt sich zu

$$\text{p-Wert} = \mathbb{P}(\tau \ge \tilde{\tau}) = 1 - F(\tilde{\tau}; \nu_1, \nu_2). \tag{21}$$

Bemerkungen

- Der Beweis erfolgt analog zur einfaktoriellen (univariaten) Varianzanalyse.
- Alternativ lässt sich das Theorem sich mithilfe einer Simulation validieren.

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

<u>Beweis</u>

Die Testgütefunktion, d.h. die Funktion, die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Test den Wert 1 annimmt, sei $q_\phi(\mu_1, \dots, \mu_p)$. Damit der betrachtete Test ein Level-α_0-Test ist, muss $q_\phi(\mu_0) \leq \alpha_0$ für alle $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$ gelten, die die Nullhypothese $\mu_1 = \dots = \mu_p = \mu_0$ erfüllen.

Wir müssen also zeigen, dass die Wahl von k_{α_0} garantiert, dass ϕ ein Level-α_0-Test mit Testumfang α_0 ist. Unter der Nullhypothese $\mu_1 = \dots = \mu_p = \mu_0$ folgt τ approximativ einer f-Verteilung, sodass näherungsweise gilt

$$
q_\phi(\mu_0) = \mathbb{P}(\tau > k) = 1 - F(k; \nu_1, \nu_2), \tag{22}
$$

wobei $F(x; \nu_1, \nu_2)$ die kumulative Verteilungsfunktion der f-Verteilung mit den Freiheitsgradparametern ν_1 und ν_2 bezeichnet. Sei nun also $k := k_{\alpha_0}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
q_\phi(\mu_0) &= 1 - F(k_{\alpha_0}; \nu_1, \nu_2) \\
&= 1 - F\left(F^{-1}(1 - \alpha_0; \nu_1, \nu_2); \nu_1, \nu_2\right) \\
&= 1 - (1 - \alpha_0) = \alpha_0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Da $q_\phi(\mu_0) = \alpha_0$ und damit auch $q_\phi(\mu_0) \leq \alpha_0$ bei Wahl von $k := k_{\alpha_0}$ gilt, ist der betrachtete Test ein Level-α_0-Test. Weiterhin folgt, dass der Testumfang des betrachteten Tests bei der Wahl von $k := k_{\alpha_0}$ gleich α_0 ist.

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Beweis (fortgeführt)

Definitionsgemäß ist der p-Wert das kleinste Signifikanzlevel α_0, bei welchem man die Nullhypothese basierend auf einem vorliegenden Wert der Teststatistik ablehnen würde. Der vorliegende Wert der τ-Teststatistik sei $\tilde{\tau}$.

Da die Teststatistik unter der Nullhypothese approximativ einer f-Verteilung folgt, würde H_0 für ein beliebiges α_0 abgelehnt werden, wenn $\tilde{\tau}$ den mithilfe von α_0 berechneten kritischen Wert überschreitet:

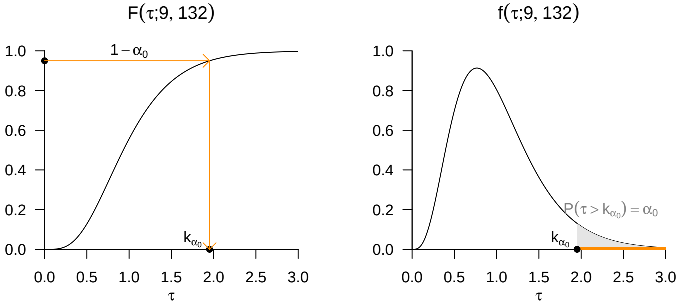
$$
\begin{aligned}
\tilde{\tau} &\geq F^{-1}(1-\alpha_0;\nu_1,\nu_2) \\
F(\tilde{\tau};\nu_1,\nu_2) &\geq F(F^{-1}(1-\alpha_0;\nu_1,\nu_2),\nu_1,\nu_2) \\
F(\tilde{\tau};\nu_1,\nu_2) &\geq 1-\alpha_0 \\
\mathbb{P}(\tau \leq \tilde{\tau}) &\geq 1-\alpha_0 \\
\alpha_0 &\geq 1-\mathbb{P}(\tau \leq \tilde{\tau}) \\
\alpha_0 &\geq \mathbb{P}(\tau \geq \tilde{\tau}).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Das kleinste $\alpha_0 \in [0,1]$ mit $\alpha_0 \geq \mathbb{P}(\tau \geq \tilde{\tau})$ ist dann offenbar $\alpha_0 = \mathbb{P}(\tau \geq \tilde{\tau})$, also folgt

$$
\text{p-Wert} = \mathbb{P}(\tau \geq \tilde{\tau}) = 1 - F(\tilde{\tau};\nu_1,\nu_2). \tag{25}
$$

Testumfangkontrolle

Wahl von k_{α_0} bei $m = 3$, $p = 4$, $k = 15$ $\Rightarrow$ $\nu_1 = 9$, $\nu_2 = 132$ und $\alpha_0 = 0.05$.



Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Anwendungsbeispiel

```
# Einfaktorielle multivariate Varianzanalyse (manuell)
alpha_0     = 0.05                                              # Signifikanzniveau
S           = sos(Y)                                            # sum-of-squares Matrizen
L           = det(S$W)/det(S$W + S$B)                           # Wilks' Lambda
w           = n-1-(1/2)*(m+p)                                   # w
t           = sqrt((m^2*(p-1)^2-4)/(m^2+(p-1)^2-5))             # t
nu_1        = m*(p-1)                                           # \nu_1
nu_2        = w*t-(1/2)*(m*(p-1)-2)                             # \nu_2
tau         = ((1-L^(1/t))/L^(1/t))*(nu_2/nu_1)                 # Teststatistik
k_alpha_0   = qf(1-alpha_0,nu_1,nu_2)                           # kritischer Wert
phi         = as.numeric(tau > k_alpha_0)                       # Nullhypothesentest
pval        = 1-pf(tau,nu_1,nu_2)                               # p-Wert

# Ausgabe der Ergebnisse
cat(  "Wilks' Lambda            : ", L,
    "\nTeststatistik            : ", tau,
    "\nFreiheitsgradparameter : ", c(nu_1, nu_2),
    "\nkritischer Wert          : ", k_alpha_0,
    "\np-Wert                   : ", pval, "\n")
```

```
Wilks' Lambda          :  0.1569049
Teststatistik          :  31.25301
Freiheitsgradparameter :  4 82
kritischer Wert        :  2.483034
p-Wert                 :  8.881784e-16
```

Anwendungsbeispiel

```r
# Einfaktorielle multivariate Varianzanalyse (automatisch)
library(car)
D       = read.csv("06_Multivariate_Varianzanalyse.csv")      # Daten einlesen
model   = lm(cbind(D$dBDI,D$dGLU) ~ D$COND, D)                # Modellspezifikation
Manova(model, test.statistic = "Wilks")                       # multivariate Varianzanalyse
```

```
Type II MANOVA Tests: Wilks test statistic
       Df test stat approx F num Df den Df    Pr(>F)
D$COND  2    0.1569   31.253      4     82 8.346e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Praktisches Vorgehen

- Man nimmt an, dass ein vorliegender Datensatz von p Gruppen von m-dimensionalen Datenvektoren für jeweils $j = 1, ..., n_i$ Realisationen von $y_{ij} \sim N(\mu_i, \Sigma)$ mit unbekannten Parametern $\mu_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, ..., p$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pd. sind.
- Man möchte entscheiden ob $H_0 : \mu_1 = ... = \mu_p$ eher zutrifft oder eher nicht.
- Man wählt ein Signifikanzniveau α_0 und bestimmt den zugehörigen Freiheitsgradparameter-abhängigen kritischen Wert k_{α_0}. Zum Beispiel gilt bei Wahl von $\alpha_0 := 0.05$, $m = 3$, $p = 4$, $k = 15$ für $i = 1, ..., p$ und somit $n = 60$ sowie $\nu_1 = 9$, $\nu_2 = 132$, dass $k_{\alpha_0} = F^{-1}(1 - 0.05; 9, 132) \approx 1.95$ ist.
- Anhand der Wilks'-Λ-Statistik sowie m, p und k berechnet man den realisierten Wert der τ-Teststatistik, den wir hier mit $\tilde{\tau}$ bezeichnen.
- Wenn $\tilde{\tau}$ größer als k_{α_0} ist, lehnt man die Nullhypothese ab, andernfalls lehnt man sie nicht ab.
- Die oben entwickelte Theorie garantiert dann, dass man im Mittel in höchstens $\alpha_0 \cdot 100$ von 100 Fällen die Nullhypothese fälschlicherweise ablehnt.
- Schließlich ergibt sich der assoziierte p-Wert der realisiertern τ-Teststatistik $\tilde{\tau}$ zu

$$\text{p-Wert} = \mathbb{P}(\tau \geq \tilde{\tau}) = 1 - F(\tilde{\tau}; \nu_1, \nu_2). \tag{26}$$

Anwendungsszenario und Datendeskription

Modellformulierung und Modellschätzung

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Zusammenfassung

Selbstkontrollfragen

Zusammenfassung

Datenanalyseverfahren

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	Einstichproben-T-Test	Einstichproben-T^2-Test
$p = 2$	Zweistichproben-T-Test	Zweistichproben-T^2-Test
$p \geq 3$	einfaktorielle Varianzanalyse	einfaktorielle multivariate Varianzanalyse
$p = I \times J$	zweifaktorielle Varianzanalyse	zweifaktorielle multivariate Varianzanalyse

Zusammenfassung

Daten

Gruppen	univariate AV	multivariate AV	Indizes
$p = 1$	$y_i \in \mathbb{R}$	$y_i \in \mathbb{R}^m$	$i = 1, ..., n$
$p = 2$	$y_{ij} \in \mathbb{R}$	$y_{ij} \in \mathbb{R}^m$	$i = 1, 2,\ j = 1, ..., n_i$
$p \geq 3$	$y_{ij} \in \mathbb{R}$	$y_{ij} \in \mathbb{R}^m$	$i = 1, ..., p,\ j = 1, ..., n_i$
$p = I \times J$	$y_{ijk} \in \mathbb{R}$	$y_{ijk} \in \mathbb{R}^m$	$i = 1, ..., I,\ j = 1, ..., J,\ k = 1, ..., n_{ij}$

Modelle

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	$y_i \sim N(\mu, \sigma^2),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$	$y_i \sim N(\mu, \Sigma),\ \mu \in \mathbb{R}^m,\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pd.
$p = 2$	$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2),\ \mu_i \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$	$y_{ij} \sim N(\mu_i, \Sigma),\ \mu_i \in \mathbb{R}^m,\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pd.
$p \geq 3$	$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2),\ \mu_i \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$	$y_{ij} \sim N(\mu_i, \Sigma),\ \mu_i \in \mathbb{R}^m,\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pd.
$p = I \times J$	$y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2),\ \mu_{ij} \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$	$y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \Sigma),\ \mu_{ij} \in \mathbb{R}^m,\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pd.

Zusammenfassung

Nullhypothesen

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	$\mu = \mu_0 \in \mathbb{R}$	$\mu = \mu_0 \in \mathbb{R}^m$
$p = 2$	$\mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \in \mathbb{R}$	$\mu_1 - \mu_2 = \mu_0 \in \mathbb{R}^m$
$p \geq 3$	$\mu_1 = ... = \mu_p$	$\mu_1 = ... = \mu_p$

Zusammenfassung

Teststatistiken

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	$T = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{y}-\mu_0}{s_y}\right)$	$T^2 = n(\bar{y} - \mu_0)^{\mathrm{T}} C^{-1} (\bar{y} - \mu_0)$
$p = 2$	$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}\left(\frac{\bar{y}_1-\bar{y}_2-\mu_0}{s_{12}}\right)$	$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \mu_0)^{\mathrm{T}} C_{12}^{-1} (\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \mu_0)$
$p \geq 3$	$F = \frac{\mathrm{SQB}/(p-1)}{\mathrm{SQW}/(n-p)}$	$\Lambda = \frac{\lvert W \rvert}{\lvert B+W \rvert}$

Zusammenfassung

Frequentistische Verteilungen der (skalierten) Teststatistik unter der Nullhypothese

Gruppen	univariate AV	multivariate AV
$p = 1$	$T \sim t(n-1)$	$\frac{n-m}{(n-1)m} T^2 \sim f(m, n-m)$
$p = 2$	$T \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	$\frac{n_1+n_2-m-1}{(n_1+n_2-2)m} T^2 \sim f(m, n_1 + n_2 - m - 1)$
$p \geq 3$	$F \sim f(p-1, n-p)$	$\frac{1-\Lambda^{1/t}}{\Lambda^{1/t}} \frac{\nu_2}{\nu_1} \sim f(\nu_1, \nu_2)$

Anwendungsszenario und Datendeskription

Modellformulierung und Modellschätzung

Modellevaluation mit der Wilks'-Λ-Statistik

Zusammenfassung

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie das Anwendungsszenario der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse.
2. Geben Sie die Definition des Modells der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse wieder.
3. Geben Sie das Theorem zu den Parameterschätzern der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse wieder.
4. Erläutern Sie die Null- und Alternativhypothese einer einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse.
5. Geben Sie das Theorem zur multivariaten Quadratsummenzerlegung wieder.
6. Was messen die *total*, *between-group* und *within-group sum-of-squares* Matrizen?
7. Geben Sie die Definition der Wilks'-Λ-Statistik wieder.
8. Erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen speziellen und approximativen H_0-Verteilungen von Wilks-Λ-Transformationen bei der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse.
9. Geben Sie das Theorem zum Wilks-Λ-Statistik-basierten Test im Rahmen der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse wieder.
10. Erläutern Sie das praktische Vorgehen zur Durchführung eines Wilks-Λ-Statistik-basierten Tests im Rahmen der einfaktoriellen multivariaten Varianzanalyse.

Referenzen

Rao, C. Radhakrishna. 1951. "An Asymptotic Expansion of the Distribution of Wilk's Criterion." *Bulletin of the International Statistical Institute* 33 (2): 177–80.

Wilks, S. S. 1932. "Certain Generalizations in the Analysis of Variance." *Biometrika* 24 (3-4): 471–94. https://doi.org/10.1093/biomet/24.3-4.471.