



# Multivariate Verfahren

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

MSc Umweltpsychologie/Mensch-Technik-Interaktion

MSc Psychologie

Joram Soch | Wintersemester 2025/2026

### (3) Eigenanalyse

---

Spezielle Matrizen

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

Selbstkontrollfragen

---

## **Spezielle Matrizen**

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

Selbstkontrollfragen

## Definition (Nullmatrizen und Einmatrizen)

- Wir bezeichnen *Nullmatrizen* (und *Nullvektoren*) mit

$$0_{nm} := (0)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{und} \quad 0_n := (0)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

- Wir bezeichnen *Einmatrizen* (und *Einsvektoren*) mit

$$1_{nm} := (1)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \text{und} \quad 1_n := (1)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

### Bemerkungen

- $0_{nm}$  und  $0_n$  bestehen nur aus Nullen.
- $1_{nm}$  und  $1_n$  bestehen nur aus Einsen.
- Es gelten zum Beispiel

$$0_n 0_m^T = 0_{nm} \quad (3)$$

und

$$1_n 1_m^T = 1_{nm}. \quad (4)$$

## Definition (Einheitsmatrizen und Einheitsvektoren)

- Wir bezeichnen die *Einheitsmatrix* als

$$I_n := (i_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{mit} \quad i_{jk} = 1 \quad \text{für} \quad j = k \quad \text{und} \quad i_{jk} = 0 \quad \text{für} \quad j \neq k. \quad (5)$$

- Wir bezeichnen die *Einheitsvektoren*  $e_i, i = 1, \dots, n$  als

$$e_i := (e_{ij})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad e_{ij} = 1 \quad \text{für} \quad i = j \quad \text{und} \quad e_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j. \quad (6)$$

### Bemerkungen

- $I_n$  besteht nur aus Nullen und Diagonalelementen gleich Eins.
- $e_i, i = 1, \dots, n$  besteht nur aus Nullen und einer Eins in der  $i$ ten Komponente.
- Es gilt

$$I_n = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \quad (7)$$

- Es gilt auch

$$I_n = (e_i^T e_j)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n} \quad (8)$$

- Es gelten weiterhin für  $1 \leq i, j \leq n$

$$e_i^T e_j = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad \text{sowie} \quad e_i^T e_i = 1 \quad \text{und} \quad e_i^T v = v^T e_i = v_i \quad \text{für} \quad v \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

## Definition (Diagonalmatrix)

Eine Matrix  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  heißt *Diagonalmatrix*, wenn  $d_{ij} = 0$  für  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$  mit  $i \neq j$ .

### Bemerkungen

- Eine Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit Diagonalelementen  $d_1, \dots, d_n$  schreibt man auch als

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n). \quad (10)$$

- Diagonalmatrizen haben viele "gute" Eigenschaften.
- Zum Beispiel überzeugt man sich leicht davon, dass Multiplikation einer Matrix  $A$  von links mit einer Diagonalmatrix  $D$  der Multiplikation der Zeilen der Matrix  $A$  mit den entsprechenden Diagonaleinträgen von  $D$  entspricht. Die Multiplikation von rechts entspricht der Multiplikation der Spalten von  $A$  mit den entsprechenden Diagonaleinträgen von  $D$ .
- Eine weitere wichtige Eigenschaft ist

$$D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \quad \Rightarrow \quad |D| = \prod_{i=1}^n d_i \quad (11)$$

- Für Beweise dieser Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur, z.B. Searle (1982), verwiesen.

## Definition (Symmetrische Matrix)

Eine Matrix  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *symmetrisch*, wenn gilt dass  $S^T = S$ .

### Bemerkungen

- Symmetrische Matrizen sind spezielle quadratische Matrizen.
- Eine symmetrische Matrix ist eine Matrix, deren Transponiertes gleich ihr selbst ist.
- Symmetrische Matrizen haben viele "gute" Eigenschaften.
- Beispielweise gilt für die Summe zweier symmetrischer Matrizen, dass auch diese wieder symmetrisch ist

$$A = A^T \quad \text{und} \quad B = B^T \quad \Rightarrow \quad A + B = (A + B)^T \quad (12)$$

und dass die Inverse einer symmetrischen Matrix, sofern sie existiert, auch symmetrisch ist,

$$S^T = S \quad \Rightarrow \quad (S^{-1})^T = S^{-1}. \quad (13)$$

- Für Beweise dieser Eigenschaften wird auf die einschlägige Literatur, z.B. Searle (1982), verwiesen.

## Definition (Positiv-definite Matrizen und positiv-semidefinite Matrizen)

Eine quadratische Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *positiv-definit*, wenn  $C$  symmetrisch ist und gilt, dass

$$x^T C x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit } x \neq 0_n. \quad (14)$$

Wenn  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv-definit ist, so schreiben wir  $C \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{pd}$ .

Eine quadratische Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *positiv-semidefinit*, wenn  $C$  symmetrisch ist und gilt, dass

$$x^T C x \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit } x \neq 0_n. \quad (15)$$

Wenn  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv-semidefinit ist, so schreiben wir  $C \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{psd}$ .

### Bemerkungen

- Positive-definite und positiv-semidefinite Matrizen sind spezielle symmetrische Matrizen.
- Kovarianzmatrixparameter von multivariaten Normalverteilungen sind positiv-definite Matrizen.
- Kovarianzmatrizen von Zufallsvektoren sind positiv-semidefinite Matrizen.
- Positiv-definite Matrizen haben viele "gute" Eigenschaften.
- Beispielsweise existiert die Inverse  $C^{-1}$  einer positiv-definiten Matrix  $C$  und ist selbst positiv-definit. Für einen Beweis dieser Eigenschaft verweisen wir auf die weiterführende Literatur, z.B. Searle (1982).

## Definition (Orthogonale Matrix)

Eine Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *orthogonal*, wenn

$$Q^T Q = I_n. \quad (16)$$

Bemerkung

- Orthogonale Matrizen sind spezielle quadratische Matrizen.
- Die Spalten einer orthogonalen Matrix sind also paarweise orthogonal. Es gilt für

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } q_i \in \mathbb{R}^n \text{ für } 1 \leq i \leq n, \quad (17)$$

dass

$$q_i^T q_j = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad q_i^T q_j = 1 \quad \text{für } i = j \quad \text{mit } 1 \leq i, j \leq n. \quad (18)$$

## Theorem (Eigenschaften orthogonaler Matrizen)

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine orthogonale Matrix. Dann gelten:

(1) (*Inverse*) Die Inverse von  $Q$  ist  $Q^T$ , es gilt

$$Q^{-1} = Q^T. \quad (19)$$

(2) (*Transposition*) Multiplikation mit der Transponierten ergibt die Einheitsmatrix, es gilt

$$QQ^T = I_n. \quad (20)$$

(3) (*Determinante*) Es gilt

$$|Q| = 1 \quad \text{oder} \quad |Q| = -1. \quad (21)$$

## Beweis

(1) Unter der Annahme, dass  $Q^{-1}$  existiert, gilt

$$Q^T Q = I_n \Leftrightarrow Q^T Q Q^{-1} = I_n Q^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1} = Q^T. \quad (22)$$

(2) Mit Eigenschaft (1) gilt

$$Q Q^T = Q Q^{-1} = I_n. \quad (23)$$

(3) Mit dem Multiplikationssatz und der Transpositionseigenschaft von Determinanten gilt

$$|Q|^2 = |Q||Q| = |Q||Q^T| = |Q Q^T| = |I_n| = 1. \quad (24)$$

Aus  $|Q|^2 = 1$  folgt dann aber, dass  $|Q| = 1$  oder  $|Q| = -1$  sein muss. □

---

Spezielle Matrizen

## **Eigenvektoren und Eigenwerte**

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

Selbstkontrollfragen

## Definition (Eigenvektor und Eigenwert)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine quadratische Matrix. Dann heißt jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0_n$ , für den mit einem passenden  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt, dass

$$Av = \lambda v, \quad (25)$$

ein *Eigenvektor* von  $A$ .  $\lambda$  heißt zugehöriger *Eigenwert* von  $A$ .

### Bemerkungen

- Ein Eigenvektor  $v$  von  $A$  wird durch  $A$  um einem Faktor  $\lambda$  verlängert.
- Jeder Eigenvektor hat einen zugehörigen Eigenwert.
- Die Eigenwerte verschiedener Eigenvektoren können identisch sein.

## Theorem (Multiplikativität von Eigenvektoren)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine quadratische Matrix. Wenn  $v \in \mathbb{R}^n$  Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist, dann ist für  $c \in \mathbb{R}$  auch  $cv \in \mathbb{R}^n$  Eigenvektor von  $A$  und zwar wiederum mit Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Beweis

Es gilt

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow cAv = c\lambda v \Leftrightarrow A(cv) = \lambda(cv). \quad (26)$$

Also ist  $cv$  ein Eigenvektor von  $A$  mit Eigenwert  $\lambda$ . □

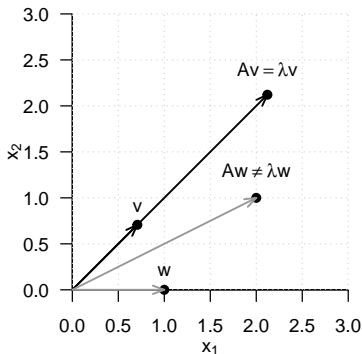
### Konvention

Wir betrachten im Folgenden nur Eigenvektoren mit der Länge bzw. Norm 1, d.h.  $\|v\| = 1$ .

# Eigenvektoren und Eigenwerte

## Visualisierung eines Eigenvektors

Für  $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist  $v := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda = 3$ ,  $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist kein Eigenvektor.



## Theorem (Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine quadratische Matrix. Dann ergeben sich die Eigenwerte von  $A$  als die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$\chi_A(\lambda) := |A - \lambda I_n| \quad (27)$$

von  $A$ . Weiterhin seien  $\lambda_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots$  die auf diese Weise bestimmten Eigenwerte von  $A$ . Die entsprechenden Eigenvektoren  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  von  $A$  können dann durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i^* I_n)v_i = 0_n \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad (28)$$

bestimmt werden.

### Bemerkungen

- Für kleine Matrizen mit  $n \leq 3$  können Eigenwerte und Eigenvektoren manuell bestimmt werden.
- Bei großen Matrizen werden Eigenwerte und Eigenvektor im Allgemeinen numerisch bestimmt.
- Beispiele sind R's `eigen()`, SciPy's `linalg.eig()` und MATLAB's `eig()`.

# Eigenvektoren und Eigenwerte

## Beweis

### (1) Bestimmen von Eigenwerten

Wir halten zunächst fest, dass mit der Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten gilt, dass

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0_n \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)v = 0_n. \quad (29)$$

Für den Eigenwert  $\lambda$  wird der Eigenvektor  $v$  also durch  $(A - \lambda I_n)$  auf den Nullvektor  $0_n$  abgebildet. Weil aber per Definition  $v \neq 0_n$  gilt, ist die Matrix  $(A - \lambda I_n)$  somit nicht invertierbar: sowohl der Nullvektor als auch  $v$  werden durch  $A$  auf  $0_n$  abgebildet, die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (A - \lambda I_n)x \quad (30)$$

ist also nicht bijektiv, und  $(A - \lambda I_n)^{-1}$  kann nicht existieren. Die Tatsache, dass  $(A - \lambda I_n)$  nicht invertierbar ist, ist aber äquivalent dazu, dass die Determinante von  $(A - \lambda I_n)$  Null ist. Also ist

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0 \quad (31)$$

notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  ist.

### (2) Bestimmen von Eigenvektoren

Es sei  $\lambda_i^*$  ein Eigenwert von  $A$ . Dann gilt mit den obigen Überlegungen, dass Auflösen von

$$(A - \lambda_i^* I_n)v_i^* = 0_n \quad (32)$$

nach  $v_i^*$  einen Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i^*$  ergibt. □

# Eigenvektoren und Eigenwerte

## Beispiel

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Wir wollen die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$  bestimmen.

### (1) Berechnen von Eigenwerten

Die Eigenwerte von  $A$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $A$ .

Das charakteristische Polynom von  $A$  ergibt sich als

$$\chi_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)^2 - 1. \quad (34)$$

Nullsetzen und Auflösen nach  $\lambda$  ergibt mit der [p-q-Formel](#)

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1. \quad (35)$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind also  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = 1$ .

## Beispiel (fortgeführt)

### (2) Berechnen von Eigenvektoren

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = 1$  ergeben sich durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i I_2)v_i = 0_2 \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (36)$$

Für  $\lambda_1 = 3$  ergibt sich

$$(A - 3I_2)v_1 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.} \quad (37)$$

Für  $\lambda_2 = 1$  ergibt sich

$$(A - 1I_2)v_2 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.} \quad (38)$$

Weiterhin gilt  $v_1^T v_2 = 0$  sowie  $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ .

## Theorem (Eigenwerte positiv-definiten und positiv-semidefiniten Matrizen)

- (1)  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine positiv-definite Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von  $C$  positiv.
- (2)  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine positiv-semidefinite Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von  $C$  nicht-negativ.

### Bemerkungen

- Die Eigenwertpositivität wird manchmal auch zur Definition der Positiv-Definitheit genutzt.
- Die Eigenwertnichtnegativität wird manchmal auch zur Definition der Positiv-Semidefinitheit genutzt.

### Beweis

(1) Mit der Definition von Eigenvektor und Eigenwert einer quadratischen Matrix gilt für jeden Eigenwert  $\lambda$  und zugehörigen Eigenvektor  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$

$$Cx = \lambda x \Leftrightarrow x^T Cx = x^T (\lambda x) = \lambda x^T x. \quad (39)$$

Mit der positiven Semidefinitheit von  $C$  und  $x^T x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0_n$  gilt dann aber

$$x^T Cx > 0 \Leftrightarrow \lambda x^T x > 0 \Rightarrow \lambda > 0. \quad (40)$$

Also ist jeder Eigenwert von  $C$  positiv.

(2) Der Beweis erfolgt analog zu (1) unter Ersetzung von  $>$  durch  $\geq$ . □

---

Spezielle Matrizen

Eigenvektoren und Eigenwerte

**Orthonormalzerlegung**

Singulärwertzerlegung

Selbstkontrollfragen

## Theorem (Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen)

$S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine symmetrische Matrix. Dann gelten

- (1) Die Eigenwerte von  $S$  sind reell.
- (2) Die Eigenvektoren zu je zwei verschiedenen Eigenwerten von  $S$  sind orthogonal.

### Bemerkung

- In nachfolgendem Beweis setzen wir die Tatsache, dass eine symmetrische  $n \times n$  Matrix  $n$  reelle Eigenwerte hat, als gegeben voraus und zeigen lediglich, dass die Eigenvektoren zu je zwei verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix orthogonal sind. Ein vollständiger Beweis des Theorems findet sich in Strang (2009), Kapitel 6.4.
- Da wir als Eigenvektoren nur Eigenvektoren der Länge 1 betrachten, sind die hier angesprochenen orthogonalen Eigenvektoren insbesondere auch orthonormal.

# Orthonormalzerlegung

## Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $\lambda_i$  und  $\lambda_j$  mit  $1 \leq i, j \leq n$  und  $\lambda_i \neq \lambda_j$  zwei verschiedenen Eigenwerte von  $S$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $q_i$  und  $q_j$ , respektive. Dann ergibt sich wie unten gezeigt, dass

$$\lambda_i q_i^T q_j = \lambda_j q_i^T q_j. \quad (41)$$

Mit  $q_i \neq 0_n, q_j \neq 0_n$  und  $\lambda_i \neq \lambda_j$  folgt damit  $q_i^T q_j = 0$ , weil es keine andere Zahl  $c$  als die Null gibt, für die bei  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a \neq b$  gilt, dass

$$ac = bc. \quad (42)$$

Um

$$\lambda_i q_i^T q_j = \lambda_j q_i^T q_j \quad (43)$$

zu zeigen, halten wir zunächst fest, dass

$$S q_i = \lambda_i q_i \Leftrightarrow (S q_i)^T = (\lambda_i q_i)^T \Leftrightarrow q_i^T S^T = q_i^T \lambda_i^T \Leftrightarrow q_i^T S = q_i^T \lambda_i \Leftrightarrow q_i^T S q_j = \lambda_i q_i^T q_j \quad (44)$$

und

$$S q_j = \lambda_j q_j \Leftrightarrow q_i^T S q_j = \lambda_j q_i^T q_j \quad (45)$$

gelten. Sowohl  $\lambda_i q_i^T q_j$  als auch  $\lambda_j q_i^T q_j$  sind also mit  $q_i^T S q_j$  und damit auch miteinander identisch.  $\square$

## Theorem (Orthonormale Zerlegung einer symmetrischen Matrix)

$S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine symmetrische Matrix mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten. Dann kann  $S$  geschrieben werden als

$$S = Q\Lambda Q^T, \quad (46)$$

wobei  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix ist und  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Diagonalmatrix ist.

### Bemerkungen

- $S = Q\Lambda Q^T$  heißt auch *Diagonalisierung* von  $S$ .
- Man wählt man als Diagonalelemente von  $\Lambda$  die der Größe nach geordneten Eigenwerte von  $S$ .
- Man wählt man als Spalten von  $Q$  die zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren von  $S$ .

# Orthonormalzerlegung

## Beweis

Es seien  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$  die der Größe nach geordneten Eigenwerte von  $S$  und  $q_1, q_2, \dots, q_n$  seien die jeweils zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren. Mit

$$Q := \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{und} \quad \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (47)$$

folgt dann mit den Definitionen von Eigenwerten und Eigenvektoren zunächst, dass

$$Sq_i = \lambda_i q_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad SQ = Q\Lambda. \quad (48)$$

Rechtseitige Multiplikation mit  $Q^T$  ergibt dann mit  $QQ^T = I_n$ , dass

$$SQQ^T = Q\Lambda Q^T \quad \Leftrightarrow \quad SI_n = Q\Lambda Q^T \quad \Leftrightarrow \quad S = Q\Lambda Q^T. \quad (49)$$

□

# Orthonormalzerlegung

Beispiel (fortgeführt)

Für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (50)$$

mit den oben bestimmten Eigenwerten  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1$  und zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

seien

$$Q := (v_1 \quad v_2) \quad \text{und} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2). \quad (52)$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} Q\Lambda Q^T &= (v_1 \quad v_2) \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) (v_1 \quad v_2)^T \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

## Theorem (Determinante und Spur einer symmetrischen Matrix)

$S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei eine symmetrische Matrix mit verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann gelten

$$|S| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \text{tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (53)$$

### Bemerkungen

- Die Determinante einer symmetrischen Matrix ist das Produkt ihrer Eigenwerte.
- Die Spur einer symmetrischen Matrix ist die Summe ihrer Eigenwerte.

# Orthonormalzerlegung

## Beweis

Mit dem Theorem zur Zerlegung einer symmetrischen Matrix mit verschiedenen Eigenwerten gilt, dass

$$|S| = |Q\Lambda Q^T|, \quad (54)$$

wobei  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix und  $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Diagonalmatrix der  $n$  verschiedenen Eigenwerte von  $S$  ist. Mit dem Determinantenmultiplikationssatz, der Determinante von orthogonalen Matrizen und der Tatsache, dass die Determinante einer Diagonalmatrix dem Produkt ihrer Diagonalelemente entspricht, gilt dann weiterhin

$$|S| = |Q\Lambda Q^T| = |Q||\Lambda||Q^T| = |\Lambda| = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (55)$$

Wiederrum mit dem Theorem zur Zerlegung einer symmetrischen Matrix mit verschiedenen Eigenwerten gilt, dass

$$\text{tr}(S) = \text{tr}(Q\Lambda Q^T). \quad (56)$$

Mit der zyklischen Permutationsinvarianz der Spur, dem Inversen orthogonaler Matrizen und der Definition der Spur gilt dann weiterhin

$$\text{tr}(S) = \text{tr}(Q\Lambda Q^T) = \text{tr}(Q^T Q \Lambda) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (57)$$

□

---

Spezielle Matrizen

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

**Singulärwertzerlegung**

Selbstkontrollfragen

## Definition (Singulärwertzerlegung)

$Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sei eine Matrix. Dann heißt die Zerlegung

$$Y = USV^T, \quad (58)$$

wobei  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  orthogonale Matrizen und  $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Diagonalmatrix ist, *Singulärwertzerlegung (singular value decomposition, SVD)* von  $Y$ . Die Diagonalelemente von  $S$  heißen die *Singulärwerte (singular values)* von  $Y$ .

### Bemerkungen

- Für eine ausführliche Diskussion der Singulärwertzerlegung, siehe z.B. Strang (2009), Kapitel 7.
- In R können Singulärwertzerlegungen mit `svd()` berechnet werden.

## Theorem (Singulärwertzerlegung und Eigenanalyse)

$Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sei eine Matrix und

$$Y = USV^T \quad (59)$$

sei ihre Singulärwertzerlegung. Dann gilt:

- Die Spalten von  $U$  sind die Eigenvektoren von  $YY^T$ ,
- die Spalten von  $V$  sind die Eigenvektoren von  $Y^TY$  und
- die entsprechenden Singulärwerte sind die Quadratwurzeln der zugehörigen Eigenwerte.

Bemerkung

- Singulärwertzerlegung und Eigenanalyse sind eng verwandt.

# Singularwertzerlegung

## Beweis

Wir halten zunächst fest, dass  $YY^T$  und  $Y^TY$  symmetrische Matrizen sind,

$$(YY^T)^T = YY^T \quad \text{und} \quad (Y^TY)^T = Y^TY, \quad (60)$$

und somit Orthormalzerlegungen haben.

Wir halten weiterhin fest, dass mit  $U^TU = I_n$  und  $V^TV = I_m$  gilt, dass

$$YY^T = USV^T (USV^T)^T = USV^T VS^T U^T = USS^T U^T = U\Lambda_U U^T, \quad (61)$$

wobei wir  $\Lambda_U := SS^T$  definiert haben, und

$$Y^TY = (USV^T)^T USV^T = VS^T U^T USV^T = V\Lambda_V V^T, \quad (62)$$

wobei wir  $\Lambda_V := S^T S$  definiert haben.

Weil das Produkt von Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist, sind  $\Lambda_U$  und  $\Lambda_V$  Diagonalmatrizen, und  $U$  und  $V$  sind per Definition orthogonale Matrizen. Wir haben also  $YY^T$  und  $Y^TY$  in Form der Orthormalzerlegungen

$$YY^T = U\Lambda_U U^T \quad \text{und} \quad Y^TY = V\Lambda_V V^T \quad (63)$$

geschrieben, wobei für die Diagonalelemente von  $\Lambda_U$  und  $\Lambda_V$  gilt, dass sie die quadrierten Werte der Diagonalelemente von  $S$  sind. Damit folgen die Aussagen des Theorems direkt.  $\square$

---

Spezielle Matrizen

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

**Selbstkontrollfragen**

# Selbstkontrollfragen

---

1. Geben Sie die Definition von Einheitsmatrizen und Nullmatrizen wieder.
2. Geben Sie die Definition von Einheitsmatrix und Einheitsvektoren wieder.
3. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.
4. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.
5. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten Matrix wieder.
6. Geben Sie die Definition einer orthogonalen Matrix wieder.
7. Geben Sie die Definition von Eigenvektor und Eigenwert einer quadratischen Matrix wieder.
8. Geben Sie das Theorem zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren wieder.
9. Geben Sie das Theorem zu den Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen wieder.
10. Geben Sie das Theorem zur orthonormalen Zerlegung einer symmetrischen Matrix wieder.
11. Geben Sie die Definition einer Singulärwertzerlegung wieder.
12. Geben Sie das Theorem zum Zusammenhang von Singulärwertzerlegung und Eigenanalyse wieder.

Searle, Shayle. 1982. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. Wiley-Interscience.

Strang, Gilbert. 2009. *Introduction to Linear Algebra*. Cambridge University Press.