

2 Matrizen

2.1 Mathematische Grundlagen

In der Vorlesung haben wir den Begriff der Matrix sowie einige grundlegende Rechenoperationen für Matrizen kennengelernt, deren Definition wir im Folgenden wiederholen.

Matrixaddition

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrixsubtraktion

$$A-B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1m} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrixtransposition

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} := \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} b_{il} \right)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq k}$$

Inverse einer Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ sodass } A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

Determinante einer Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \begin{cases} |A| := a_{11} & \text{für } n = 1 \\ |A| := \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j}|A_{1j}| & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

2.2 Analyse in R

Wir beginnen zunächst mit der Definition einiger Matrizen. Erklären Sie die Funktion und Details des folgenden R-Codes:

```
# spaltenweise Definition von A
A = matrix(c( 2, 1,-3, 6, 0, 5), nrow = 2)

# zeilenweise Definition von B
B = matrix(c( 4, 2,
             -1, 0,
              1, 3),
           nrow = 3,
           byrow = TRUE)

# Ausgabe dieser Matrizen
print(A)
print(B)

# Definition weiterer Matrizen
C1 = matrix(c(2,1,
              3,4),
            nrow = 2,
            byrow = TRUE)
C2 = matrix(c(1,0,
              0,0),
            nrow = 2,
            byrow = TRUE)
C3 = matrix(c(2,0,0,
              0,1,0,
              0,0,3),
            nrow = 3,
            byrow = TRUE)

print(C1)
print(C2)
print(C3)
```

2.3 Erste Programmieraufgabe

Illustrieren Sie die in der Vorlesung besprochenen Matrixoperationen mithilfe der oben definierten Matrizen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Matrixaddition und Matrixsubtraktion sind nur für Matrizen gleicher Größe definiert. Da $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ demzufolge nicht addiert oder subtrahiert werden können, beginnen wir damit, dass wir die Matrix B transponieren. Sowohl A als auch B^T sind dann 2×3 Matrizen.
- Transponieren Sie die Matrix B . Die Transposition ist in R als die Funktion `t()` implementiert.
- Berechnen Sie die Matrix $A + B^T$. Die Matrixaddition wird in R mittels `+` berechnet.
- Berechnen Sie die Matrix $A - B^T$. Die Matrixsubtraktion wird in R mittels `-` berechnet.
- Definieren Sie den Skalar $c = 3$ und berechnen Sie die Matrix cA . Die Skalarmultiplikation wird in R mittels `*` berechnet.
- Berechnen Sie die Matrixprodukte AB und BA . Die Matrixmultiplikation wird in R mittels `%*%` berechnet.
- Vergegenwärtigen Sie sich die Anforderungen der Matrixmultiplikation, indem Sie versuchen, die Matrix $A^T B$ zu berechnen. Da die Dimensionen der Matrizen nicht zueinander passen, sollten Sie eine Fehlermeldung erhalten.
- Invertieren Sie die Matrix C_1 . Die Matrixinversion ist in R als die Funktion `solve()` implementiert.
- Führen Sie die Probe für diese Berechnung aus, indem Sie die Matrizen $C_1^{-1}C_1$ und $C_1C_1^{-1}$ berechnen. Sie sollten jeweils die zweidimensionale Einheitsmatrix I_2 erhalten.
- Vergegenwärtigen Sie sich die Operation der Matrixinversion, indem Sie versuchen, die Matrix C_2 zu invertieren. Da diese Matrix nicht invertierbar ist, sollten Sie eine Fehlermeldung erhalten.
- Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen C_1 , C_2 und C_3 . Die Determinante ist in R als die Funktion `det()` implementiert.
- Geben Sie die Ergebnisse ihrer Analyse aus. Sie sollten folgende Ergebnisse erhalten:

Transposition:

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    4  -1    1
[2,]    2   0    3
```

Addition:

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    6  -4    1
[2,]    3    6    8
```

Subtraktion:

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   -2  -2  -1
[2,]   -1    6    2
```

Skalarmultiplikation:

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    6  -9    0
[2,]    3  18   15
```

Matrixprodukte:

```
      [,1] [,2]
[1,]   11    4
[2,]    3   17
```

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   10    0   10
[2,]   -2    3    0
[3,]    5   15   15
```

Error in t(A) %*% B: non-conformable arguments

Matrixinversion:

```
      [,1] [,2]
[1,]  0.8 -0.2
[2,] -0.6  0.4
```

```
      [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
```

```
      [,1]      [,2]
[1,]    1 -5.551115e-17
[2,]    0  1.000000e+00
```

```
Error in solve.default(C2): Lapack routine dgesv: system is exactly singular: U[2,2] = 0
```

Determinanten:

```
[1] 5
```

```
[1] 0
```

```
[1] 6
```

2.4 Analyse in R

Im nächsten Schritt wollen wir mit dem in der ersten Seminarsitzung vorgestellten Datensatz `FADE_SAME.csv` arbeiten. Erklären Sie den folgenden R-Code und die daraus resultierende Datenmatrix Y :

```
# Daten einlesen
fname = 'FADE_SAME.csv'           # Dateiname
D      = read.csv(fname)          # Dataframe

# Variablen extrahieren
vars   = c('novelty.FADE', 'novelty.SAME',
           'memory.FADE', 'memory.SAME') # Definition Variablen
m      = length(vars)             # Anzahl Variablen
n      = nrow(D)                  # Anzahl Datenpunkte
Y      = as.matrix(D[,vars])      # n x m Datenmatrix
print(dim(Y))                    # Überprüfung Datenmatrix
```

2.5 Zweite Programmieraufgabe

Schreiben Sie nun Code in R, der mithilfe von Matrixalgebra den Mittelwert der SAME-Scores und den Mittelwert der FADE-Scores für alle Datenpunkte berechnet. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Definieren Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$. Wir werden diese im Folgenden als Mittelwertmatrix bezeichnen.
- Berechnen Sie das Matrixprodukt $Z = YM^T$. Vergewährtigen Sie sich, was passiert, wenn eine (vierdimensionale) Zeile von $Y \in \mathbb{R}^{n \times 4}$ mit der (transponierten) Mittelwertmatrix $M^T \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ multipliziert wird: Das Ergebnis ist ein (zweidimensionaler) Vektor, der den Mittelwert der FADE-Scores (1. und 3. Spalte von Y) und den Mittelwert der SAME-Scores (2. und 4. Spalte von Y) enthält. Die Ergebnismatrix $Z \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ ist demzufolge eine Matrix mit zwei Spalten.
- Geben Sie die ersten fünf Zeilen der Datenmatrix Y und der Ergebnismatrix Z aus. Sie sollten folgende Ergebnisse erhalten:

Datenmatrix:

```
      novelty.FADE novelty.SAME memory.FADE memory.SAME
[1,]      -2.1590      -0.4765      -1.1738      -1.0402
[2,]      -2.8816       0.1879      -0.9160      -1.5394
[3,]      -1.9735       1.3358      -2.5448       1.9103
[4,]      -2.1385      -0.6427      -0.5912      -1.2746
[5,]      -1.2860      -1.3707      -0.7627      -1.2626
```

Ergebnismatrix:

```
      mean.FADE mean.SAME
[1,]  -1.66640  -0.75835
[2,]  -1.89880  -0.67575
[3,]  -2.25915   1.62305
[4,]  -1.36485  -0.95865
[5,]  -1.02435  -1.31665
```

2.6 Lückentext

Füllen Sie mit den in der Übung gewonnenen Erkenntnissen den folgenden Lückentext aus und präsentieren Sie die Ergebnisse im Seminar:

Lückentext: Bei der _____ und der _____ werden die Einträge zweier Matrizen gleicher Größe elementweise verrechnet. Bei der _____ werden die Einträge einer Matrix beliebiger Größe elementweise mit einem Skalar multipliziert. Bei der _____ entspricht der Eintrag (i, j) der Ergebnismatrix dem Skalarprodukt aus der _____ der ersten Matrix und der _____ der zweiten Matrix. Für die Matrixmultiplikation muss die _____ der ersten Matrix mit der _____ der zweiten Matrix übereinstimmen. Die _____ einer Matrix sowie die _____ einer Matrix sind nur für quadratische Matrizen definiert. Quadratische Matrizen sind Matrizen, bei der die _____ und die _____ gleich sind.

2.7 Mögliche Klausurfrage

Präsentieren Sie im Seminar folgende Klausurfrage und erklären Sie die richtige Antwort:

Frage: Welche dieser Matrixoperationen ist **nicht** elementweise definiert?

- a) Matrixaddition
- b) Matrixsubtraktion
- c) Skalarmultiplikation
- d) Matrixmultiplikation

2.8 Kinderwitz

Was sagt eine Null zur einer Acht?

Antwort: Schicker Gürtel!