

## 2 Matrizen

### 2.9 Übungsaufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (1)$$

- a) Berechnen Sie die Spur von  $A$ .
- b) Berechnen Sie die Determinante von  $A$ .
- c) Berechnen Sie die Inverse von  $A$ .
- d) Überprüfen Sie die Inverse auf ihre Richtigkeit.
- e) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$ .
- f) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

### 2.10 Lösung der Übungsaufgabe

Wir bezeichnen die Einträge der Matrix  $A$  mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

#### a) Spur

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = 6 + 2 = 8. \quad (3)$$

#### b) Determinante

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 6 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 12 + 3 = 15. \quad (4)$$

#### c) Inverse

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/15 & -1/15 \\ 3/15 & 6/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/15 & -1/15 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

#### d) Probe

Für die Inverse muss gelten, dass  $AA^{-1} = I_n$ . Wir überprüfen:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/15 & -1/15 \\ 3/15 & 6/15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12/15 + 3/15 & -6/15 + 6/15 \\ -6/15 + 6/15 & 3/15 + 12/15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Analog ergibt sich  $A^{-1}A = I_n$ . Damit ist die Inverse korrekt.

#### e) Eigenwerte

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= |A - \lambda I_n| = \left| \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (6-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot (-3) = 12 - 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 3 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 15. \end{aligned} \tag{7}$$

Das heißt, wir müssen folgende quadratische Gleichung lösen:

$$0 = \lambda^2 - 8\lambda + 15. \tag{8}$$

Lösung der Gleichung mittels p-q-Formel ergibt

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15} \\ &= 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 15} \\ &= 4 \pm \sqrt{1} \\ &= 4 \pm 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Damit sind die Eigenwerte  $\lambda_1 = 5$  und  $\lambda_2 = 3$ .

## f) Eigenvektoren

Für  $\lambda_1 = 5$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I_n)v_1 = 0_n &\Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{aligned} 1x + 1y &= 0 \\ -3x - 3y &= 0 \end{aligned} \\ &\Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.}\end{aligned}\tag{10}$$

Für  $\lambda_2 = 3$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}(A - \lambda_2 I_n)v_2 = 0_n &\Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{aligned} 3x + 1y &= 0 \\ -3x - 1y &= 0 \end{aligned} \\ &\Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.}\end{aligned}\tag{11}$$

Für die Eigenvektoren gilt

$$\|v_1\| = \|v_2\| = 1 \quad \text{sowie} \quad Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \text{und} \quad Av_2 = \lambda_2 v_2.\tag{12}$$