



Psychometrische Diagnostik

MSc Psychologie

MSc Umweltpsychologie / Mensch-Technik-Interaktion

SoSe 2026

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(1) Repräsentationstheorie

Einordnung

Repräsentationstheoretische Grundlagen

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Diskussion

Selbstkontrollfragen

Einordnung

Repräsentationstheoretische Grundlagen

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Diskussion

Selbstkontrollfragen

Repräsentationstheorie = Messtheorie = Quantifizierungstheorie

Additive Konjunktmetzung - Intervallskalenrepräsentation qualitativer Ordnungen ohne Konkatenation

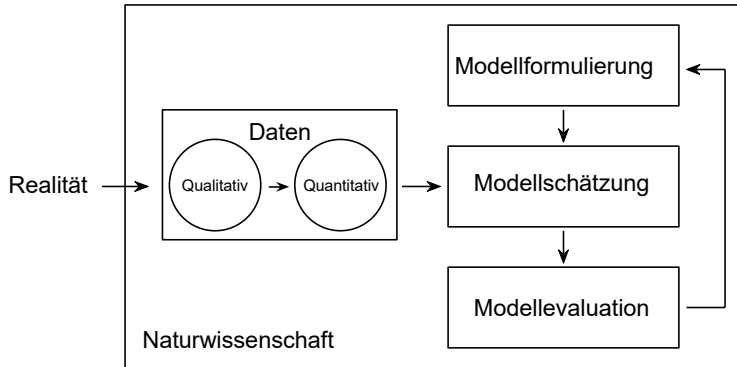
- Zentraler Beitrag der Repräsentationstheorie des Messens (Luce & Tukey (1964))
- Entwicklung moderner anwendungsorientierter Verfahren zur Voraussetzungsprüfung (z.B. Karabatsos (2005))
- Postulierte Verbindungen zur Item-Response-Theorie (z.B. Kyngdon (2008))
- Zur aktuellen Relevanz, siehe z.B. Pedersen et al. (2025)
- Zu messtheoretischen Grundbetrachtungen siehe [Einführung in die Forschungsmethoden](#)

Repräsentationstheorie

- Anwendung des Programms des Logischen Positivismus mit Hochphase 1950 - 2000
- Begründet um 1950 durch [Patrick Suppes](#)
- Klärung des Begriffs des Messens über den Stand der Physik von 1950 hinaus
- Ausarbeitung und Differenzierung der Skalenklassifikation nach Stevens (1946)
- Zentrale Arbeiten durch Scott & Suppes (1958), Luce & Tukey (1964),
- Gesamtwerk in Krantz et al. (1971), Suppes et al. (1989), Luce et al. (1990)

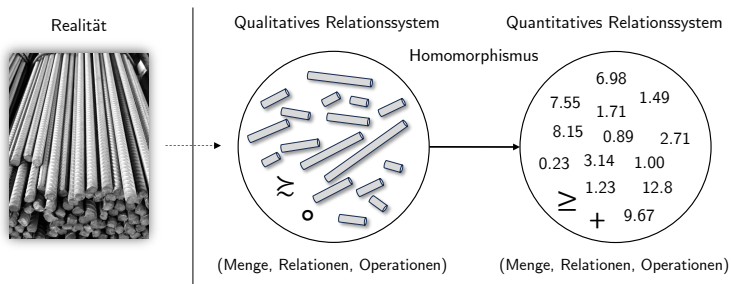
Für ein einführendes vertieftes Verständnis wird Roberts (1984) empfohlen.

Modellbasierter Realismus



Für eine Einführung zum modellbasierten Realismus siehe [Einführung in die Forschungsmethoden](#)

Repräsentationstheorie



Die Repräsentationstheorie setzt die Existenz qualitativer Relationssysteme als Datengrundlage voraus

Welche Eigenschaften müssen qualitative Relationssysteme für eine numerische Repräsentation haben?

Mathematische Theorie aus Axiomen/Definitionen, Theoremen und Beweisen

Mengen und spezielle Mengen (Relationen, Operationen, Abbildungen) als Gegenstände

Der Skalenbegriff der Psychologie

Nominalskala

- Übersetzung von Kategorien in Zahlen,
- Die Zahlen haben keine eigentliche Bedeutung
- Weder Größer-Kleiner Verhältnisse noch Grundrechenarten sind sinnvoll
- Deskriptivstatistiken (Mittelwert, Standardabweichung) sind nicht sinnvoll

Leiden Sie an Depressionen?

Ja ☐ (0)

Nein ☐ (1)

Ordinalskala

- Übersetzung von Größer-Kleiner Verhältnissen in Zahlen
- Die Zahlen haben nur hinsichtlich ihrer Größer-Kleiner Verhältnisse Bedeutung
- Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division sind nicht sinnvoll
- Deskriptivstatistiken (Mittelwert, Standardabweichung) sind nicht sinnvoll

Wie geht es Ihnen momentan ?

Gut ☐ (0)

Nicht so gut ☐ (1)

Schlecht ☐ (2)

Intervallskala

- Übersetzung von Abständen in Zahlen
- Die Zahlen haben nur hinsichtlich ihrer Differenzen Bedeutung
- Addition und Subtraktion sind sinnvoll, Multiplikation und Division nicht
- Deskriptivstatistiken (Mittelwert, Standardabweichung) sind sinnvoll

Reizbarkeit (BDI-II)

Ich bin nicht reizbarer als sonst ☐ (0)

Ich bin reizbarer als sonst ☐ (1)

Ich bin viel reizbarer als sonst ☐ (2)

Ich fühle mich dauern gereizt ☐ (3)

Verhältnisskala

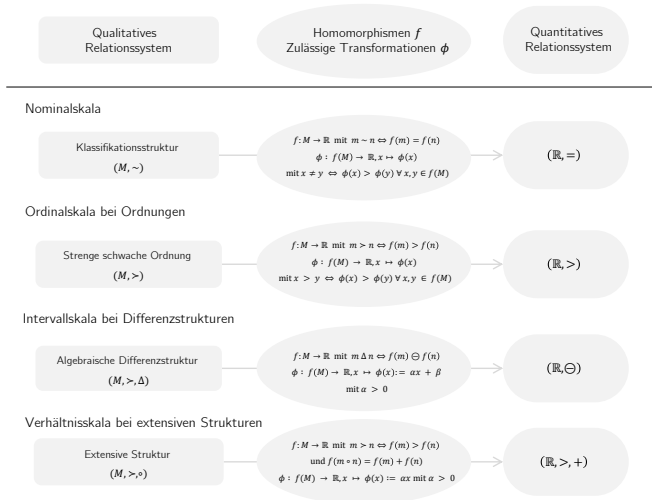
- Übersetzung von physischen Kombinationen in Zahlen
- Die Zahlen haben hinsichtlich der Grundrechenarten Bedeutung
- Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division sind sinnvoll
- Deskriptivstatistiken (Mittelwert, Standardabweichung) sind sinnvoll

Wie viele depressive Episoden hatten Sie ?

☐ (0) ☐ (1) ☐ (2) ☐ (4) ☐ (5) ☐ (6)

Einordnung

Der eigentliche Skalenbegriff der Repräsentationstheorie



Einordnung

Repräsentationstheoretische Grundbegriffe

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Diskussion

Selbstkontrollfragen

Relationen und Operationen

Relationen

- Relationen sind Beziehungen zwischen zwei Dingen (Objekten, Objekteigenschaften, Zahlen).
- Im qualitativen Relationssystem betrachtet die RT qualitative Relationen von empirischen Eigenschaften.
- Beispiele für qualitative Relationen sind "nicht wahrnehmbar kürzer als" oder "wärmer als".
- Qualitative Relationen werden in dieser Vorlesung mit $\succsim$ bezeichnet.
- Im quantitativen Relationssystem betrachtet die RT quantitative Relationen von Zahlen.
- Beispiel für quantitative Relationen sind $\geq$ oder $=$.

Operationen

- Operationen sind Verknüpfungen zwischen zwei Dingen (Objekten, Objekteigenschaften, Zahlen).
- Operationen verknüpfen zwei Dinge zu einem resultierenden dritten Ding.
- Im qualitativen Relationssystem betrachtet die RT empirische Konkatenationen als Operationen.
- Ein Beispiel für eine qualitative Operation ist das Hintereinanderlegen zweier Stäbe.
- Qualitative Operationen werden oft mit $\circ$ bezeichnet.
- Im quantitativen Relationssystem betrachtet die RT mathematische Verknüpfungen als Operationen.
- Ein Beispiel für eine quantitative Operation ist die Addition zweier reeller Zahlen.
- Quantitative Operationen werden mit den Standardsymbolen $+$, $-$, $\cdot$, $/$ bezeichnet.

Qualitatives und Quantitatives Relationssystem

Qualitatives Relationssystem

- $(M, \succ, \dots, \circ, \dots)$ mit Objekteigenschaftsmenge M , qualitativen Relationen und qualitativen Operationen.
- Das qualitative Relationssystem wird in der Repräsentationstheorie als bekannte Datengrundlage vorausgesetzt.
- Die qualitativen empirischen Eigenschaften von Dingen sind also nach Voraussetzung bekannt.
- Je nach Art des qualitativen Relationssystems haben Relationen und Operationen verschiedene Eigenschaften.
- Ein Beispiel für eine Relationseigenschaft ist die *Transitivität*

$$\text{Wenn } m \succ n \text{ und } n \succ p, \text{ dann gilt } m \succ p \text{ für alle } m, n, p \in M. \quad (1)$$

- Ein Beispiel für eine Operationseigenschaft ist die *Assoziativität*

$$(m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p). \quad (2)$$

Quantitatives Relationssystem

- Einheit $(\mathbb{R}, \geq, \dots, +, \dots)$ aus Zahlen $\mathbb{R}$, quantitativen Relationen $\geq, \dots$ und quantitativen Operationen $+, \dots$
- Das quantitative Relationssystem entspricht meist den vertrauten Zahlräumen und Zahlenoperationen.
- Je nach Art des quantitativen Relationssystems haben Relationen und Operationen verschiedene Eigenschaften.
- In $(\mathbb{R}, \geq, +)$ gelten zum Beispiel auch die *Transitivität* und *Assoziativität*, denn

$$x \geq y \text{ und } y \geq z \Rightarrow x \geq z \text{ und } (x + y) + z = x + (y + z) \text{ für alle } x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Homomorphismen und Skalen

Homomorphismen

- Als Zuordnungen von Zahlen in $\mathbb{R}$ zu Elementen von M modellieren Homomorphismen den Messvorgang.
- Speziell sind Homomorphismen "strukturertaltende" Abbildungen zwischen den Relationssystemen.
- Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beispielsweise strukturertaltend, wenn gilt:

$$m \succ n \Rightarrow f(m) \geq f(n) \text{ und } f(m \circ n) = f(m) + f(n) \text{ für alle } m, n \in M. \quad (4)$$

- $\Rightarrow$ Die Funktionswerte von m und n in $\mathbb{R}$ stehen "in der gleichen Relation" wie m und n in M .
- $\geq$ im quantitativen Relationssystem spiegelt dann $\succ$ im qualitativen Relationssystem.
- $\Rightarrow$ Der Funktionswert der Verknüpfung von m und n gleicht der Verknüpfung der Funktionswerte von m, n .
- $+$ im quantitativen Relationssystem spiegelt dann $\circ$ im qualitativen Relationssystem.
- Die Betrachtung von $(M, \succ, \circ)$ und $(\mathbb{R}, \geq, +)$ ist allerdings nur ein Beispiel.
- $\Rightarrow$ In der Repräsentationstheorie ist man an Spiegelungen beliebiger Relationen und Operationen interessiert.

Skalen

- Die Einheit $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ aus einem qualitativen Relationssystem $\mathcal{M}$, einem quantitativen Relationssystem $\mathcal{N}$ und einem Homomorphismus f zwischen ihnen wird in der Repräsentationstheorie als *Skala* bezeichnet.
- Der Skalenbegriff der Repräsentationstheorie erweitert und schärft den Skalenbegriff nach Stevens (1946).
- Der Skalenbegriff der Repräsentationstheorie hat mit dem Wort "Skala" für einen Fragebogen wenig zu tun.

Repräsentationsproblem und Eindeutigkeitsproblem

Repräsentationsproblem

- Die Analyse von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Homomorphismus zwischen den Relationssystemen wird Repräsentationsproblem genannt.
- Notwendige Bedingungen sind Eigenschaften der Relationssysteme, wenn ein Homomorphismus existiert.
- Hinreichende Bedingungen sind Eigenschaften der Relationssysteme zur Konstruktion eines Homomorphismus.
- Theoreme, die besagen, dass bestimmte Eigenschaften des qualitativen Relationssystems für die Existenz eines Homomorphismus notwendig und hinreichend sind, werden *Repräsentationstheoreme* genannt.
- Wenn ein Homomorphismus existiert, dann ist im Sinne der Repräsentationstheorie eine "Messung" möglich.

Eindeutigkeitsproblem

- Das Eindeutigkeitsproblem der Repräsentationstheorie besteht darin, zu bestimmen, ob ein existierender Homomorphismus der einzige mögliche ist.
- Die Antworten auf Eindeutigkeitsprobleme legen die Skalenarten fest, insbesondere sind die Homomorphismen dort nicht eindeutig, sondern durch sogenannte *zulässige Transformationen* ineinander überführbar.
- Eine Abbildung ϕ heißt *zulässige Transformation*, wenn gilt, dass bei gegebenen Relationssystemen, wenn f ein Homomorphismus ist, $\phi \circ f$ auch ein Homomorphismus ist.

Skalenarten

Gegeben sei eine Skala $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ mit zugrundeliegenden Mengen M und $\mathbb{R}$ und Homomorphismus f . Weiterhin sei

$$\Phi \subseteq \{\phi | \phi : f(M) \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (5)$$

die Menge der zulässigen Transformationen von $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$. Dann ist die *Skalenart* von $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ durch Φ bestimmt. Insbesondere gelten:

- (1) Wenn die Menge der zulässigen Transformationen der Skala die Menge der *streng monoton steigenden Funktionen*

$$\Phi := \{\phi | \phi : f(M) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) \text{ mit } x > y \Leftrightarrow \phi(x) > \phi(y) \text{ für alle } x, y \in f(M)\} \quad (6)$$

ist, dann heißt $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ *Ordinalskala*.

- (2) Wenn die Menge der zulässigen Transformationen der Skala die Menge der *positiv linear-affinen Funktionen*

$$\Phi := \{\phi | \phi : f(M) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) := \alpha x + \beta \text{ mit } \alpha > 0 \text{ und } \beta \in \mathbb{R}\} \quad (7)$$

ist, dann heißt $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ *Intervallskala*.

- (3) Wenn die Menge der zulässigen Transformationen der Skala die Menge der *Ähnlichkeitstransformationen*

$$\Phi := \{\phi | \phi : f(M) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) := \alpha x \text{ mit } \alpha > 0\} \quad (8)$$

ist, dann heißt $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ *Verhältnisskala*.

Beispiel: Ordinalmessung

Definition (Schwache Ordnung)

M sei eine Menge und $\succsim$ sei eine Binärrelation auf M . $\succsim$ heißt *schwache Ordnung* auf M , wenn $\succsim$ vollständig und transitiv ist. Eine Binärrelation $\succsim$ auf einer Menge M heißt *vollständig*, wenn für alle $m, n \in M$ gilt: $m \succsim n$ oder $n \succsim m$ (oder beides). Eine Binärrelation $\succsim$ auf einer Menge M heißt *transitiv*, wenn für alle $m, n, p \in M$ gilt: aus $m \succsim n$ und $n \succsim p$ folgt $m \succsim p$.

Theorem (Repräsentation)

$\mathcal{M} := (M, \succsim)$ sei ein qualitatives Relationssystem mit einer endlichen Menge M und einer Binärrelation $\succsim$ auf M , und $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, \geq)$ sei ein quantitatives Relationssystem. Dann existiert ein Homomorphismus f von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, also eine Funktion der Form

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto f(m) \text{ mit der Eigenschaft } m \succsim n \Leftrightarrow f(m) \geq f(n), \quad (9)$$

dann und nur dann, wenn $\succsim$ eine schwache Ordnung ist.

Theorem (Eindeutigkeit)

$\mathcal{M} := (M, \succsim)$ sei ein qualitatives Relationssystem aus einer endlichen Menge M und einer schwachen Ordnung $\succsim$ auf M , $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, \geq)$ sei ein quantitatives Relationssystem, und es sei $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Dann ist $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ eine Ordinalskala; die Klasse der zulässigen Transformationen von f ist also die Klasse der streng monoton steigenden Funktionen.

Für Beweise des Repräsentationstheorems und des Eindeutigkeitstheorems verweisen wir auf Roberts (1984).

Beispiel: Ordinalmessung (fortgesetzt)

Als Beispiel betrachten wir die Messung der Präferenz einer Patientin bezüglich eines psychotherapeutischen Settings. Dazu sei zunächst $M := \{P, H, O\}$ die Menge der möglichen Settings Präsenz, Hybrid und Online. Eine schwache Ordnung auf M wird dann durch Befragung der Patientin bezüglich aller Paare $(m, n) \in M^2$ etabliert. Die Vollständigkeit wird dabei dadurch garantiert, dass tatsächlich alle Paare abgefragt werden. Die Transitivität wird dadurch garantiert, dass inkonsistente Präferenzen nicht zugelassen sind.

Nehmen wir an, die Patientin äußert folgendes Präferenzmuster:

	P	H	O
P	$\succsim$	$\succsim$	$\succsim$
H	$\succsim$	$\succsim$	$\succsim$
O	$\succsim$	$\succsim$	$\succsim$

Die Tabelle ist dabei so zu lesen, dass der Zeileneintrag jeweils mit dem Spalteneintrag verglichen wird. Ein Eintrag $\succsim$ in Zeile a und Spalte b bedeutet also $a \succsim b$, das heißt: a wird mindestens so stark präferiert wie b . Ein Eintrag $\precsim$ bedeutet entsprechend, dass die Relation $\succsim$ in dieser Richtung nicht gilt. Aus der ersten Zeile folgt daher sowohl $P \succsim H$ als auch $P \succsim O$. Aus der ersten Spalte folgt zugleich $\neg(H \succ P)$ und $\neg(O \succ P)$. Damit ist P sowohl gegenüber H als auch gegenüber O strikt bevorzugt. Zwischen H und O steht die Relation dagegen in beide Richtungen, also $H \succsim O$ und $O \succsim H$. Genau dies bedeutet Indifferenz, also $H \sim O$. Für die Patientin gilt also $P \succ H \sim O$, denn

$$P \succsim H \wedge \neg(H \succ P) \Rightarrow P \succ H, \quad P \succsim O \wedge \neg(O \succ P) \Rightarrow P \succ O, \quad H \succsim O \wedge O \succsim H \Rightarrow H \sim O. \quad (10)$$

Beispiel: Ordinalmessung (fortgesetzt)

Eine mögliche numerische Repräsentation der Präferenzordnung dieser Patientin ist

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto f(m) := \begin{cases} 1 & (m = O) \\ 1 & (m = H) \\ 2 & (m = P) \end{cases} . \quad (11)$$

Denn dann gilt für alle $m, n \in M$:

$$m \succ n \Leftrightarrow f(m) \geq f(n). \quad (12)$$

Dies lässt sich durch vollständige Fallunterscheidung zeigen. Es ergibt sich

(m, n)	$m \succ n$	$(f(m), f(n))$	$f(m) \geq f(n)$
(P, P)	<i>w</i>	(2, 2)	<i>w</i>
(P, H)	<i>w</i>	(2, 1)	<i>w</i>
(P, O)	<i>w</i>	(2, 1)	<i>w</i>
(H, P)	<i>f</i>	(1, 2)	<i>f</i>
(H, H)	<i>w</i>	(1, 1)	<i>w</i>
(H, O)	<i>w</i>	(1, 1)	<i>w</i>
(O, P)	<i>f</i>	(1, 2)	<i>f</i>
(O, H)	<i>w</i>	(1, 1)	<i>w</i>
(O, O)	<i>w</i>	(1, 1)	<i>w</i>

(13)

Also stimmen für alle Paare $(m, n) \in M^2$ die Wahrheitswerte von $m \succ n$ und $f(m) \geq f(n)$ überein. Allerdings ist diese Repräsentation natürlich nicht eindeutig.

Repräsentationstheoretische Grundlagen

Beispiel: Ordinalmessung

Sei etwa mit

$$\phi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) := x^2 \quad (14)$$

eine streng monoton steigende Funktion gegeben. Dann gilt für $g := \phi \circ f$, dass

$$g : M \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto g(m) := (\phi \circ f)(m) = \phi(f(m)) = \begin{cases} 1 & (m = O) \\ 1 & (m = H) \\ 4 & (m = P) \end{cases} . \quad (15)$$

Aber auch für g gilt dann für alle $m, n \in M$, dass

$$m \succsim n \Leftrightarrow g(m) \geq g(n). \quad (16)$$

denn

(m, n)	$m \succsim n$	$(g(m), g(n))$	$g(m) \geq g(n)$
(P, P)	w	(4, 4)	w
(P, H)	w	(4, 1)	w
(P, O)	w	(4, 1)	w
(H, P)	f	(1, 4)	f
(H, H)	w	(1, 1)	w
(H, O)	w	(1, 1)	w
(O, P)	f	(1, 4)	f
(O, H)	w	(1, 1)	w
(O, O)	w	(1, 1)	w

(17)

und somit ist auch g eine zulässige Repräsentation der Präferenzordnung der Patientin.

Bedeutsame Aussagen

- Eine Aussage bezüglich zweier (Mess)Werte im quantitativen Relationssystem heißt im Sinne der Repräsentationstheorie bedeutsam, wenn sie bezüglich der gewählten Skalenrepräsentation invariant ist, sich mit Änderung der Skala also nicht ändert.
- Ein klassisches Beispiel für *nicht* bedeutsame Aussagen sind Verhältnisaussagen bei Intervallskalen zur Temperaturmessung wie Celsius (T_C) und Fahrenheit ($T_F = \frac{9}{5} T_C + 32$). Seien zum Beispiel zwei Objekten m und n durch die Celsius-Skala die Temperaturen 40°C und 20°C zugeordnet. Dann gilt

$$\frac{\text{Temperatur von } m}{\text{Temperatur von } n} = \frac{40^\circ\text{C}}{20^\circ\text{C}} = 2, \text{ aber } \frac{104^\circ\text{F}}{68^\circ\text{F}} = 1.52 \neq 2 \quad (18)$$

- Formal gilt: $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ sei eine Skala. Eine Aussage heißt *bedeutsam bezüglich* $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$, wenn der Wahrheitsgehalt der Aussage unter allen zulässigen Transformationen von $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ unverändert bleibt.
- Im Folgenden zeigen wir, dass für $m, n, p, q \in M$ die Aussage $f(m) - f(n) = f(p) - f(q)$ also die Gleichheit von Differenzen im Allgemeinen nicht bedeutsam ist, wenn f eine Ordinalskala ist, und bedeutsam ist, wenn f eine Intervallskala ist.
- Weiterhin zeigen wir, dass für $m, n \in M$ mit $f(n) \neq 0$ und $c \neq 0$ die Aussage $f(m)/f(n) = c$ im Allgemeinen nicht bedeutsam, wenn f eine Intervallskala ist und bedeutsam ist, wenn f eine Verhältnisskala ist.

Bedeutsame Aussagen

Beweis der Nicht-Bedeutsamkeit von Aussagen zur Gleichheit von Differenzen bei Ordinalskalen

f sei eine Ordinalskala. Dann ist die Menge Φ der zulässigen Transformationen von f die Menge der streng monoton steigenden Funktionen. Wir zeigen durch ein Gegenbeispiel, dass die Differenzengleichheitsaussage nicht unter allen zulässigen Transformationen von f wahr bleibt. Beispielsweise sei $M := \{m, n, p, q\}$ die Menge des qualitativen Relationssystems und ein Homomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $(\mathbb{R}, \geq)$ definiert durch

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(m) := 8, f(n) := 4, f(p) := 6 \text{ und } f(q) := 2 \quad (19)$$

Dann gilt

$$f(m) - f(n) = f(p) - f(q) \Leftrightarrow 8 - 4 = 6 - 2 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (20)$$

Sei nun eine streng monoton steigende Funktion ϕ auf $\mathbb{R}$ definiert mit den speziellen Werten

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) \text{ mit } \phi(2) := 3, \phi(4) := 5, \phi(6) := 8, \phi(8) := 9. \quad (21)$$

ϕ ist auf $\{2, 4, 6, 8\}$ streng monoton steigend, denn für alle $x, y \in \{2, 4, 6, 8\}$ gilt $x > y \Leftrightarrow \phi(x) > \phi(y)$. Dann gilt aber

$$(\phi \circ f)(m) - (\phi \circ f)(n) = 9 - 5 = 4 \neq 5 = 8 - 3 = (\phi \circ f)(p) - (\phi \circ f)(q) \quad (22)$$

Damit bleibt die Aussage $f(m) - f(n) = f(p) - f(q)$ aber nicht für alle $\phi \in \Phi$ wahr.

Bedeutungsvolle Aussagen

Beweis der Bedeutsamkeit von Aussagen zur Gleichheit von Differenzen bei Intervallskalen

f sei eine Intervallskala. Dann ist die Menge Φ der zulässigen Transformationen von f die Menge der positiv linear-affinen Funktionen. Für jede Transformation $\phi \circ f$ mit $\phi \in \Phi$ gilt mit $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(m) - f(n) &= f(p) - f(q) \\ \Leftrightarrow \alpha(f(m) - f(n) + \beta - \beta) &= \alpha(f(p) - f(q) + \beta - \beta) \\ \Leftrightarrow (\alpha f(m) + \beta) - (\alpha f(n) + \beta) &= (\alpha f(p) + \beta) - (\alpha f(q) + \beta) \\ \Leftrightarrow (\phi \circ f)(m) - (\phi \circ f)(n) &= (\phi \circ f)(p) - (\phi \circ f)(q). \end{aligned} \tag{23}$$

Repräsentationstheoretische Grundlagen

Bedeutungssame Aussagen

Beweis der Nicht-Bedeutungssamkeit von Verhältnisaussagen bei Intervallskalen

Wir betrachten die Aussage für $f(n) \neq 0$

$$\frac{f(m)}{f(n)} = c \Leftrightarrow f(m) = cf(n) \quad (24)$$

Dann gilt im Allgemeinen für eine positiv linear-affine Funktion ϕ , dass

$$(\phi \circ f)(m) \neq c(\phi \circ f)(n) \quad (25)$$

Zum Beispiel seien $f(m) := 2$, $f(n) := 1$ (also $c = 2$) und ϕ sei die positiv linear-affine Funktion

$$\phi : f(M) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) := \alpha x + \beta \text{ mit } \alpha := 1 \text{ und } \beta := 1. \quad (26)$$

Dann gilt offenbar

$$\frac{f(m)}{f(n)} = \frac{2}{1} = 2 \quad (27)$$

also

$$f(m) = 2f(n), \quad (28)$$

aber

$$(\phi \circ f)(m) \neq 2(\phi \circ f)(n) \quad (29)$$

denn

$$(\phi \circ f)(m) = \alpha f(m) + \beta = 1 \cdot 2 + 1 = 3 \quad (30)$$

und

$$2(\phi \circ f)(n) = 2(\alpha f(n) + \beta) = 2\alpha f(n) + 2\beta = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4. \quad (31)$$

Bedeutsame Aussagen

Beweis der Bedeutsamkeit von Aussagen zu Verhältnissen bei Verhältnisskalen

f sei eine Verhältnisskala. Dann ist die Menge Φ der zulässigen Transformationen von f die Menge der Ähnlichkeitstransformationen. Für jede Transformation von $\phi \circ f$ von f mit $\phi \in \Phi$ gilt mit $\alpha > 0$ also

$$\begin{aligned}\frac{f(m)}{f(n)} &= c \\ \Leftrightarrow f(m) &= c f(n) \\ \Leftrightarrow \alpha f(m) &= c \alpha f(n) \\ \Leftrightarrow (\phi \circ f)(m) &= c (\phi \circ f)(n) \\ \Leftrightarrow \frac{(\phi \circ f)(m)}{(\phi \circ f)(n)} &= c.\end{aligned}\tag{32}$$

Bedeutsame Statistiken

- Eine Statistik heißt im Sinne der Repräsentationstheorie *bedeutsam*, wenn für ihren Wert irrelevant ist, ob eine Skalentransformation auf der Ebene der Werte des Homomorphismus oder auf der Ebene der Werte der Statistik durchgeführt wird.
- Formaler gilt folgende Definition: $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ sei eine Skala und es seien $m_1, \dots, m_n \in M$, wobei M die dem qualitativen Relationssystem $\mathcal{M}$ zugrundeliegende Menge bezeichne. ϕ sei eine zulässige Transformation von f , die gegebenenfalls auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird, und γ sei eine *reellwertige Statistik*, d.h. eine Abbildung der Form

$$\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (f(m_1), \dots, f(m_n)) \mapsto \gamma(f(m_1), \dots, f(m_n)) \quad (33)$$

Dann wird γ eine *bedeutsame Statistik* genannt, wenn

$$\phi(\gamma(f(m_1), \dots, f(m_n))) = \gamma(\phi(f(m_1)), \dots, \phi(f(m_n))) \quad (34)$$

- Im Folgenden zeigen wir, dass zum Beispiel der Mittelwert

$$\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (f(m_1), \dots, f(m_n)) \mapsto \gamma(f(m_1), \dots, f(m_n)) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(m_i) \quad (35)$$

im Allgemeinen keine bedeutsame Statistik ist, wenn f eine Ordinalskala ist, aber eine bedeutsame Statistik, wenn f eine Intervall- oder Verhältnisskala ist.

Bedeutsame Statistiken

Beweis der Nicht-Bedeutsamkeit des Mittelwerts bei Ordinalskala

Es sei $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ eine Ordinalskala und ϕ eine zulässige Transformation von f , also eine streng monoton steigende Funktion. Für $f(M) \subset \mathbb{R}_{>0}$ und $n := 2$ seien $f(m_1) = 1$ und $f(m_2) = 3$ und es sei ϕ die streng monotone Funktion

$$\phi : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) := x^2. \quad (36)$$

Dann gilt

$$\phi(\gamma(f(m_1), f(m_2))) = \phi\left(\frac{1}{2}(1+3)\right) = \phi(2) = 2^2 = 4. \quad (37)$$

Es gilt aber auch

$$\gamma(\phi(f(m_1)), \phi(f(m_2))) = \gamma(\phi(1), \phi(3)) = \gamma(1^2, 3^2) = \frac{1}{2}(1+9) = 5. \quad (38)$$

Also gilt

$$\phi(\gamma(f(m_1), f(m_2))) = 4 \neq 5 = \gamma(\phi(f(m_1)), \phi(f(m_2))). \quad (39)$$

Bedeutsame Statistiken

Beweis der Bedeutsamkeit des Mittelwerts bei Intervallskala

Es sei $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ eine Intervallskala und ϕ eine zulässige Transformation von f , also eine Funktion der Form

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) := \alpha x + \beta \text{ mit } \alpha > 0 \quad (40)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(\gamma(f(m_1), \dots, f(m_n))) &= \phi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(m_i)\right) \\ &= \alpha \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(m_i)\right) + \beta \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha f(m_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \alpha f(m_i) + \sum_{i=1}^n \beta \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha f(m_i) + \beta) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(f(m_i)) \\ &= \gamma(\phi(f(m_1)), \dots, \phi(f(m_n))). \end{aligned}$$

Beispiel: Extensivmessung nach Hölder

Definition (Archimedisch geordnete Gruppe)

M sei eine Menge, $\succsim$ sei eine Binärrelation auf M und $\circ$ sei eine Operation auf M . Dann heißt das Relationssystem $(M, \succsim, \circ)$ *archimedisch geordnete Gruppe*, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- (1) $\succsim$ ist eine schwache Ordnung auf M , also vollständig und transitiv.
- (2) $(M, \circ)$ ist eine Gruppe. Für alle $m, n, p \in M$ gelten also die *Assoziativität* $(m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p)$; es gibt ein *neutrales Element* $e \in M$, so dass für alle $m \in M$ gilt, $m \circ e = e \circ m = m$; für alle $m \in M$ existiert ein *inverses Element* $m^{-1} \in M$, so dass $m \circ m^{-1} = m^{-1} \circ m = e$.

- (3) Für alle $m, n, p \in M$ gilt:

$$m \succsim n \Leftrightarrow m \circ p \succsim n \circ p \Leftrightarrow p \circ m \succsim p \circ n. \quad (41)$$

- (4) Definiert man die zu $\succsim$ gehörige strikte Ordnung $\succ$ durch

$$m \succ n \Leftrightarrow m \succsim n \text{ und nicht } n \succsim m, \quad (42)$$

so gilt für alle $m, m' \in M$: Aus $m \succ e$, wobei e das neutrale Element von $(M, \circ)$ bezeichnet, folgt, dass eine natürliche Zahl n existiert, so dass

$$\underbrace{m \circ \dots \circ m}_{n\text{-mal}} \succ m'. \quad (43)$$

Das Standardbeispiel für eine archimedisch geordnete Gruppe ist $(\mathbb{R}, \geq, +)$.

Beispiel: Extensivmessung nach Hölder

Theorem (Repräsentation nach Hölder)

$\mathcal{M} := (M, \succ, \circ)$ sei ein qualitatives Relationssystem und $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, \geq, +)$ sei ein quantitatives Relationssystem. Dann existiert ein Homomorphismus f von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, also eine Funktion der Form

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, m \mapsto f(m), \quad (44)$$

mit den Eigenschaften

$$m \succ n \Leftrightarrow f(m) \geq f(n) \quad (45)$$

und

$$f(m \circ n) = f(m) + f(n), \quad (46)$$

genau dann, wenn $(M, \succ, \circ)$ eine archimedisch geordnete Gruppe ist.

Theorem (Eindeutigkeit)

$\mathcal{M} := (M, \succ, \circ)$ sei ein qualitatives Relationssystem mit einer archimedisch geordneten Gruppe $(M, \succ, \circ)$, $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, \geq, +)$ sei ein quantitatives Relationssystem, und es sei $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Dann ist $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ eine Verhältnisskala; die Klasse der zulässigen Transformationen von f ist also die Klasse der positiven linearen Transformationen

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \phi(x) = \alpha x \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (47)$$

Für Beweise verweisen wir auf Hölder (1901) und Krantz et al. (1971).

Extensivmessung und Psychologie

- Die Extensivmessung mit Verhältnisskalenrepräsentation basiert auf einer Konkatenationsoperation $\circ$, die unter geeigneten Axiomen additiv repräsentiert werden kann.
- In klassischen extensiven Strukturen (z.B. Länge, Masse) ist $\circ$ operational interpretierbar und intersubjektiv reproduzierbar, z.B. als "Stäbe aneinanderlegen" oder "Gewichte zusammenlegen".
- Stevens (1946) zitiert dazu aus dem Abschlussbericht der Kommission der British Association for the Advancement of Science zur Frage der Messbarkeit psychologischer Phänomene ein Kommissionsmitglied mit: *that any law purporting to express a quantitative relation between sensation intensity and stimulus intensity is not merely false but is in fact meaningless unless and until a meaning can be given to the concept of addition as applied to sensation (Final Report, p. 245)*. Damit wird die klassische Forderung zum Ausdruck gebracht, dass Messung im strengen Sinne eine interpretierbare Additionsoperation voraussetzt.
- Hinter dieser Aussage steht die Frage, welche empirische Operation überhaupt die Rolle von $m \circ n$ spielen könnte, wenn ein menschlicher Beobachter die Perzepte m und n wahrnehmen kann.
- Selbst wenn Reize im physikalischen Sinne additiv kombiniert werden, verhalten sich die resultierenden Perzepte typischerweise nicht additiv, etwa im Sinne des Weber-Fechner-Gesetzes oder des Stevens'schen Potenzgesetzes.
- Wenn man in der Psychologie also keine Konkatenationsoperation im qualitativen Relationssystem angeben kann, wie kann man dennoch zu einer Repräsentation mindestens auf Intervallskalenniveau gelangen?

⇒ Dies ist der Ansatzpunkt der additiven Konjunkturmessung.

Einordnung

Repräsentationstheoretische Grundbegriffe

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Diskussion

Selbstkontrollfragen

Additive Konjunktmessung

- Quantitative Repräsentation qualitativer Attribute auf Intervallskalenniveau
- Keine Konkatationsoperation im qualitativen Relationssystem erforderlich
- Ordnungsrelation auf einem zweidimensionalen qualitativen Relationssystem als Grundlage

Beispiel

Ziel ist die quantitative Repräsentation von intrasubjektiven Stimmungs- und Antriebszuständen einer Patientin. *Stimmung (Affektivität)* bezeichne hier subjektives emotionales Erleben mit den qualitativen Zuständen *traurig, neutral, fröhlich*. *Antrieb (psychomotorische Aktivität)* bezeichne hier subjektives Energie- und Handlungsbereitschaftserleben mit den qualitativen Zuständen *gehemmt, normal, gesteigert*.

Um die qualitativen Zustände der Stimmung in Zahlen auf Intervallskalenniveau zu repräsentieren, erhebt man in der additiven Konjunktmessung die Ordnungsrelation auf der Menge der Tupel (Stimmung, Antrieb). Man fragt also die Patientin für alle Kombinationen der neun Tupel aus Stimmungs- und Antriebszuständen, was schlimmer ist. Ist zum Beispiel die Kombination aus trauriger Stimmung und gehemmtem Antrieb schlimmer als die Kombination aus fröhlicher Stimmung und gesteigertem Antrieb?

Man lässt dabei natürlich alle Kombinationen zu, zum Beispiel auch die Frage, ob die Kombination aus fröhlicher Stimmung und gehemmtem Antrieb (Energielosigkeit) schlimmer ist als die Kombination aus trauriger Stimmung und gesteigertem Antrieb (Unruhe).

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beispiel (fortgesetzt)

Formal fragt man dabei, welche Zahlen man

- den Ausprägungen *traurig*, *neutral*, *fröhlich* des Konstrukts *Stimmung* sowie
- den Ausprägungen *gehemmt*, *normal*, *gesteigert* des Konstrukts *Antrieb*

sinnvollerweise zuordnen kann, sodass quantitative Differenzen qualitativ sinnvoll interpretiert werden können.

Man fragt also nach der Form der Funktionen

$$f : \{\text{traurig}, \text{neutral}, \text{fröhlich}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : \{\text{gehemmt}, \text{normal}, \text{gesteigert}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (48)$$

Man fragt also zum Beispiel, ob die Definitionen

$$f(\text{traurig}) := 1 \quad f(\text{neutral}) := 2 \quad f(\text{fröhlich}) := 3 \quad (49)$$

und

$$g(\text{gehemmt}) := -10 \quad g(\text{normal}) := 0 \quad g(\text{gesteigert}) := 10 \quad (50)$$

sinnvoll sind. Insbesondere fragt man, ob, wenn man dann mit den Zahlen wie gewohnt Differenzrechnung betreibt, die Ergebnisse im Qualitativen sinnvoll sind, ob in der Tat zum Beispiel in Bezug auf die Stimmung die quantitative Gleichheit von

$$3 - 2 = 2 - 1 \quad (51)$$

also im Sinne der qualitativen Stimmungsdifferenzstruktur

$$\Delta(\text{fröhlich}, \text{neutral}) \sim \Delta(\text{neutral}, \text{traurig}) \quad (52)$$

interpretiert werden kann.

Beispiel (fortgesetzt)

Die Hauptaussage der Theoreme der additiven Konjunktmessung ist, dass dies in der Tat der Fall ist, sofern die Ordnungsrelation auf der Menge der Tupel (Stimmung, Antrieb) die dafür notwendige Regelmäßigkeit aufweist. Diese *Regelmäßigkeit* wird durch die Eigenschaften einer additiv-konjunkten Struktur ausgedrückt.

Schließlich ist festzuhalten, dass, auch wenn in vielen Fragebögen sicherlich Zuordnungen der Form

(1) leicht (2) mittel (3) schwer (53)

genutzt und dann auch zur quantitativen Datenauswertung verwendet werden, in den allermeisten Fällen davon auszugehen ist, dass diese nicht durch den hier beschriebenen Vorgang einer additiven Konjunktmessung validiert wurden.

Man spricht dann auch von einer *per fiat*-Quantifizierung, hätte sich aber schon etwas mehr Mühe in der Fragebogenentwicklung geben können. Wissenschaftssoziologisch sind jedoch repräsentationstheoretische Überlegungen gegenüber Reliabilitäts- und faktoriellen Validitätsanalysen klar unterinzentiviert.

Überblick

- (1) Hauptaussage zur Repräsentation und Eindeutigkeit additiv-konjunkter Strukturen
- (2) Bedeutung der wesentlichen Eigenschaften einer additiv-konjunkten Struktur
- (3) Beweisskizzen zur Hauptaussage zur Repräsentation und Eindeutigkeit additiv-konjunkter Strukturen

Theorem (Repräsentation und Eindeutigkeit additiv-konjunkter Strukturen)

$(X, Y, \succsim)$ sei eine additiv-konjunkte Struktur. Dann existieren Funktionen

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : Y \rightarrow \mathbb{R} \quad (54)$$

so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt, dass

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2) \quad (55)$$

Weiterhin gilt, dass wenn $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ zwei weitere Funktionen mit den gleichen Eigenschaften wie f und g sind, Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$

$$\tilde{f}(x) = \alpha f(x) + \beta_1 \text{ und } \tilde{g}(y) = \alpha g(y) + \beta_2 \quad (56)$$

gilt.

Bemerkungen

- Im Folgenden skizzieren wir zunächst das Wesen einer additiv-konjunkten Struktur.
- Im Anschluss skizzieren wir einen Beweis obigen Theorems durch Konstruktion von f und g .
- Schließlich beweisen wir den Intervallskalencharakter der Repräsentation.

Definition (Additiv-konjunkte Struktur)

X und Y seien nicht-leere Mengen und $\succsim$ sei eine binäre Relation auf $X \times Y$. $(X, Y, \succsim)$ heißt *additiv-konjunkte Struktur*, wenn die Binärrelation $\succsim$ folgende sechs Eigenschaften erfüllt

- (1) $\succsim$ ist eine schwache Ordnung.
- (2) $\succsim$ ist eine unabhängige konjunkte Relation.
- (3) $\succsim$ erfüllt die Doppelaufhebung.
- (4) $\succsim$ ist unrestringiert lösbar.
- (5) $\succsim$ besitzt die Archimedische Eigenschaft.
- (6) Die Komponenten von $\succsim$ sind essentiell.

Bemerkungen

- Wir erläutern die mehr oder weniger “intuitiven” Eigenschaften (1) bis (3) im Folgenden.
- Wir zeigen die Notwendigkeit von (1) bis (3) bei Vorliegen einer additiv-konjunkten Repräsentation.
- (4) bis (6) sind technische Bedingungen, deren Bedeutung sich in der Intervallskalenkonstruktion erschließt.

Definition (Schwache Ordnung)

Sei X eine Menge und $\succsim$ sei eine Binärrelation auf X . $\succsim$ heißt *schwache Ordnung* auf X , wenn $\succsim$ *vollständig* und *transitiv* ist. Dabei heißt $\succsim$ *vollständig*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$x_1 \succsim x_2 \vee x_2 \succsim x_1. \quad (57)$$

Weiterhin heißt $\succsim$ *transitiv*, wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt:

$$(x_1 \succsim x_2 \wedge x_2 \succsim x_3) \Rightarrow x_1 \succsim x_3. \quad (58)$$

Bemerkungen

- Die Vollständigkeit von $\succsim$ besagt zum einen, dass *alle* x_1, x_2 in Relation stehen.
- In der Definition der Vollständigkeit bezeichnet $\vee$ das nicht-exklusive logische *oder*.
- Den Fall $x_1 \succsim x_2$ und $x_2 \succsim x_1$ bezeichnen wir mit $x_1 \sim x_2$ (Äquivalenz, Indifferenz).
- Den Fall $x_1 \succsim x_2$ und $\neg(x_2 \succsim x_1) = x_2 \precsim x_1$ bezeichnen wir mit $x_1 \succ x_2$ (strikte Ordnung).
- Den Fall $\neg(x_1 \succsim x_2) = x_1 \precsim x_2$ und $x_2 \succsim x_1$ bezeichnen wir mit $x_2 \succ x_1$ (strikte Ordnung).

Beispiel (Schwache Ordnung)

Es sei X eine Menge von Patient:innen, deren BDI-II-Wert bestimmt wurde. Auf X sei dann die Binärrelation $\succsim$ definiert als

$$x_1 \succsim x_2 \Leftrightarrow x_1 \text{ hat einen geringeren oder den gleichen BDI-II-Wert wie } x_2 \quad (59)$$

Intuitiv besagt $x_1 \succsim x_2$ also, dass es Patient:in x_1 mindestens so gut geht wie Patient:in x_2 .

Vollständigkeit

Für zwei beliebige Patient:innen x_1 und x_2 gilt dann, dass x_1 einen geringeren oder den gleichen BDI-II-Wert wie x_2 hat, oder dass x_2 einen geringeren oder den gleichen BDI-II-Wert wie x_1 hat, oder beides, nämlich dann, wenn x_1 und x_2 den gleichen BDI-II-Wert haben. Es gilt also die Vollständigkeit $x_1 \succsim x_2 \vee x_2 \succsim x_1$. Gleichzeitig folgt hier aus $x_1 \succsim x_2 \wedge x_2 \succsim x_1$, also der Gleichheit der BDI-II-Werte von x_1 und x_2 aber nicht, dass $x_1 = x_2$, denn es kann verschiedene Patient:innen mit gleichem BDI-II-Wert geben. Das ist z.B. bei der $\geq$ Relation auf $\mathbb{R}$ anders. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgt aus $x \geq y$ und $y \geq x$ immer, dass $x = y$. Dies ist die sogenannte *Antisymmetrie* einer sogenannten *linearen Ordnung*.

Ordnungen auf unterschiedlichen Mengen (Patient:innen, Zahlen) können also unterschiedlich beschaffen sein.

Transitivität

Für drei beliebige Patient:innen x_1, x_2, x_3 gilt, dass wenn x_1 einen geringeren oder den gleichen BDI-II-Wert wie x_2 hat und x_2 einen geringeren oder den gleichen BDI-II-Wert wie x_3 hat, dass x_1 auch einen geringeren oder den gleichen BDI-II-Wert wie x_3 hat.

Theorem (Schwache Ordnung bei additiv-konjunkter Repräsentation)

Für $(X, Y, \succsim)$ seien

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad (60)$$

so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt, dass

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2). \quad (61)$$

Dann ist $\succsim$ eine schwache Ordnung auf $X \times Y$.

Bemerkung

- Aus der Existenz einer additiv-konjunkten Repräsentation folgen Vollständigkeit und Transitivität von $\succsim$.

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beweis

Vollständigkeit

Seien $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2) \vee f(x_2) + g(y_2) \geq f(x_1) + g(y_1) \\ \Leftrightarrow (x_1, y_1) \succcurlyeq (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \succcurlyeq (x_1, y_1). \end{aligned} \tag{62}$$

Also ist $\succcurlyeq$ vollständig.

Transitivität

Seien $x_1, x_2, x_3 \in X$ und $y_1, y_2, y_3 \in Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \succcurlyeq (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \succcurlyeq (x_3, y_3) \\ \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2) \wedge f(x_2) + g(y_2) \geq f(x_3) + g(y_3) \\ \Rightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_3) + g(y_3) \\ \Leftrightarrow (x_1, y_1) \succcurlyeq (x_3, y_3). \end{aligned} \tag{63}$$

Also ist $\succcurlyeq$ transitiv.

□

Definition (Unabhängige Relation)

X und Y seien nicht-leere Mengen und $\succsim$ sei eine binäre Relation auf $X \times Y$. Die Relation $\succsim$ heißt *unabhängig*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt:

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_1) \Rightarrow (x_1, y_2) \succsim (x_2, y_2), \quad (64)$$

und

$$(x_1, y_1) \succsim (x_1, y_2) \Rightarrow (x_2, y_1) \succsim (x_2, y_2). \quad (65)$$

Bemerkungen

- Bei einer unabhängigen Relation ist bei Fixierung einer Komponente die Ordnung auf der jeweils anderen Komponente unabhängig von der konkreten Ausprägung der fixierten Komponente. Wird eine Komponente konstant gehalten, so hängt die Ordnung bezüglich der anderen Komponente also nicht von der gewählten Ausprägung der konstanten Komponente ab.

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beispiel (Unabhängigkeit)

Wir betrachten die Unabhängigkeit von Komponentenrelationen bei einer Präferenzrelation bezüglich Therapiedauer und Therapieform. Seien dazu $X := \{24h, 80h\}$ und $Y := \{\text{Verhaltenstherapie, Psychoanalyse}\}$.

Konform mit der Unabhängigkeit der Komponentenrelationen wären dann die Präferenzen

$$(24h, \text{Verhaltenstherapie}) \succ (80h, \text{Verhaltenstherapie}) \quad (66)$$

und

$$(24h, \text{Psychoanalyse}) \succ (80h, \text{Psychoanalyse}) \quad (67)$$

Unabhängig von der Therapieform wird hier also eine Kurzzeittherapie über eine Langzeittherapie präferiert.

Nicht konform mit der Unabhängigkeit der Komponentenrelationen wären dagegen die Präferenzen

$$(24h, \text{Verhaltenstherapie}) \succ (80h, \text{Verhaltenstherapie}) \quad (68)$$

und

$$(80h, \text{Psychoanalyse}) \succ (24h, \text{Psychoanalyse}) \quad (69)$$

In diesem Fall hängt die Präferenz über Therapiedauern von der Therapieform ab und die Komponentenrelationen sind nicht unabhängig.

Theorem (Unabhängigkeit bei additiv-konjunkter Repräsentation)

Für $(X, Y, \succsim)$ seien

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad (70)$$

so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt, dass

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2) \quad (71)$$

Dann gilt

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_1) \Leftrightarrow (x_1, y_2) \succsim (x_2, y_2), \quad (72)$$

und

$$(x_1, y_1) \succsim (x_1, y_2) \Leftrightarrow (x_2, y_1) \succsim (x_2, y_2). \quad (73)$$

Bemerkungen

- Aus der Existenz einer additiv-konjunkten Repräsentation folgt die Unabhängigkeit der Komponentenrelationen.

Beweis

Nach Annahme gilt für alle $x_1, x_2 \in X$ und $y_1 \in Y$, dass

$$(x_1, y_1) \succcurlyeq (x_2, y_1) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_1) \quad (74)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \succcurlyeq (x_2, y_1) &\Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_1) \\ &\Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \\ &\Leftrightarrow f(x_1) + g(y_2) \geq f(x_2) + g(y_2) \\ &\Leftrightarrow (x_1, y_2) \succcurlyeq (x_2, y_2) \end{aligned} \quad (75)$$

□

Der Beweis der zweiten Äquivalenz erfolgt analog durch Kürzen von $f(x_1)$ bzw. $f(x_2)$.

Definition (Komponentenordnungen)

$(X, Y, \succ)$ sei eine additiv-konjunkte Struktur. Dann sind die zu $(X, Y, \succ)$ gehörenden *Komponentenordnungen* $(X, \succ_x)$ und $(Y, \succ_y)$ definiert durch

$$x_1 \succ_x x_2 \Leftrightarrow (x_1, y) \succ (x_2, y) \text{ für ein } y \in Y \quad (76)$$

und

$$y_1 \succ_y y_2 \Leftrightarrow (x, y_1) \succ (x, y_2) \text{ für ein } x \in X \quad (77)$$

Bemerkungen

- Der Intervallskalencharakter bei additiver Konjunkturmessung bezieht sich auf $(X, \succ_x)$ und $(Y, \succ_y)$.
- Mit der Unabhängigkeit der additiv-konjunkten Struktur gelten äquivalent

$$x_1 \succ_x x_2 \Leftrightarrow (x_1, y) \succ (x_2, y) \text{ für alle } y \in Y \quad (78)$$

und

$$y_1 \succ_y y_2 \Leftrightarrow (x, y_1) \succ (x, y_2) \text{ für alle } x \in X \quad (79)$$

da die Unabhängigkeit der additiv-konjunkten Struktur ja gerade besagt, dass die Ordnung bezüglich einer Komponente nicht von der gewählten Ausprägung der konstanten Komponente abhängt.

Theorem (Komponentenordnungen)

$(X, Y, \succ)$ sei eine additiv-konjunkte Struktur und $(X, \succ_x)$ und $(Y, \succ_y)$ seien die zu $(X, Y, \succ)$ gehörenden Komponentenordnungen. Dann sind $(X, \succ_x)$ und $(Y, \succ_y)$ schwache Ordnungen.

Bemerkungen

- Es ist sinnvoll, für die qualitativen Ordnungen auf X und Y nach Repräsentationen zu fragen.

Beweis

Mit der Definition der Schwachen Ordnung sind die Vollständigkeit und die Transitivität von $(X, \succsim_x)$ und $(Y, \succsim_y)$ zu zeigen. Wir beschränken uns auf $(X, \succsim_x)$, der Beweis für $(Y, \succsim_y)$ erfolgt analog.

(1) Mit der Vollständigkeit von $(X, Y, \succsim)$ gilt mit $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, dass

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \succsim (x_1, y_1). \quad (80)$$

Entsprechend gilt für ein $y \in Y$, dass

$$(x_1, y) \succsim (x_2, y) \vee (x_2, y) \succsim (x_1, y). \quad (81)$$

Dies ist aber nach Definition von $\succsim_x$ äquivalent zu

$$x_1 \succsim_x x_2 \vee x_2 \succsim_x x_1 \quad (82)$$

und damit der Vollständigkeit von $(X, \succsim_x)$.

Beweis (fortgesetzt)

(2) Mit der Transitivität von $(X, Y, \succsim)$ gilt mit $x_1, x_2, x_3 \in X$ und $y_1, y_2, y_3 \in Y$ für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$, dass

$$((x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \succsim (x_3, y_3)) \Rightarrow (x_1, y_1) \succsim (x_3, y_3) \quad (83)$$

Entsprechend gilt für ein $y \in Y$, dass

$$((x_1, y) \succsim (x_2, y) \wedge (x_2, y) \succsim (x_3, y)) \Rightarrow (x_1, y) \succsim (x_3, y). \quad (84)$$

Dies ist aber nach Definition von $\succsim_x$ äquivalent zu

$$(x_1 \succsim_x x_2 \wedge x_2 \succsim_x x_3) \Rightarrow x_1 \succsim_x x_3 \quad (85)$$

und damit der Transitivität von $(X, \succsim_x)$.



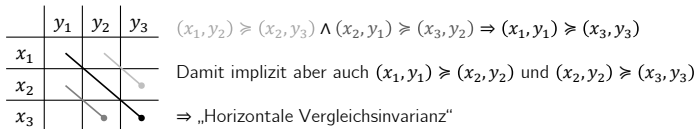
Definition (Doppelaufhebung)

$(X, Y, \succsim)$ sei eine additiv-konjunkte Struktur. Die Relation $\succsim$ erfüllt die *Doppelaufhebung*, wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ und $y_1, y_2, y_3 \in Y$ gilt:

$$(x_1, y_2) \succsim (x_2, y_3) \wedge (x_2, y_1) \succsim (x_3, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \succsim (x_3, y_3) \quad (86)$$

Bemerkung

- Die Notwendigkeit der Doppelaufhebung ergibt sich bei additiv-konjunkter Repräsentation
- Wirklich intuitiv wird die Doppelaufhebung dadurch nicht.
- Visuell kann man sich die Doppelaufhebung anhand untenstehender Grafik merken.



Theorem (Doppelaufhebung bei additiv-konjunkter Repräsentation)

Für $(X, Y, \succsim)$ seien

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad (87)$$

so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt, dass

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2) \quad (88)$$

Dann gilt für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ und $y_1, y_2, y_3 \in Y$

$$(x_1, y_2) \succsim (x_2, y_3) \wedge (x_2, y_1) \succsim (x_3, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) \succsim (x_3, y_3) \quad (89)$$

Bemerkungen

- Aus der Existenz einer additiv-konjunkten Repräsentation folgt die Doppelaufhebung

Beweis

Nach Annahme gelten

$$(x_1, y_2) \succcurlyeq (x_2, y_3) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_2) \geq f(x_2) + g(y_3) \quad (90)$$

und

$$(x_2, y_1) \succcurlyeq (x_3, y_2) \Leftrightarrow f(x_2) + g(y_1) \geq f(x_3) + g(y_2) \quad (91)$$

Addition der Ungleichungen ergibt dann

$$f(x_1) + g(y_2) + f(x_2) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_3) + f(x_3) + g(y_2) \quad (92)$$

Subtraktion von $f(x_2) + g(y_2)$ auf beiden Seiten ergibt dann

$$f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_3) + g(y_3) \Leftrightarrow (x_1, y_1) \succcurlyeq (x_3, y_3) \quad (93)$$

Theorem (Repräsentation und Eindeutigkeit additiv-konjunkter Strukturen)

$(X, Y, \succsim)$ sei eine additiv-konjunkte Struktur. Dann existieren Funktionen

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : Y \rightarrow \mathbb{R} \quad (94)$$

so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt, dass

$$(x_1, y_1) \succsim (x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2) \quad (95)$$

Weiterhin gilt, dass wenn $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ zwei weitere Funktionen mit den gleichen Eigenschaften wie f und g sind, Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$

$$\tilde{f}(x) = \alpha f(x) + \beta_1 \text{ und } \tilde{g}(y) = \alpha g(y) + \beta_2 \quad (96)$$

gilt.

Beweisskizze der Repräsentation

Im Folgenden geben wir eine konstruktive Beweisskizze des Repräsentations- und Eindeutigkeitstheorems. *Konstruktiv* bedeutet dabei, dass wir basierend auf $(X, Y, \succsim)$ die Repräsentationen f und g konstruieren. *Beweisskizze* bedeutet, dass wir nicht den Anspruch haben, mathematisch vollständig vorzugehen. Das Vorgehen in der Beweisskizze der Repräsentation besteht im Wesentlichen aus drei Schritten:

1. Konstruktion ganzzahliger Repräsentationswerte mithilfe von verzahnten Standardsequenzen
2. Konstruktion rationaler Repräsentationswerte mithilfe dyadischer Verfeinerungen
3. Konstruktion reeller Repräsentationswerte mithilfe von Dedekindschen Schnitten

Zum Gelingen dieser Schritte sind unter anderem die Eigenschaften (4), (5) und (6) additiv-konjunkter Strukturen wesentlich. Die einzelnen Schritte haben dabei mehr (Konstruktion ganzzahliger Repräsentationswerte) oder weniger (Konstruktion rationaler und reeller Repräsentationswerte) experimentelle Bedeutung.

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beweisskizze der Repräsentation (fortgeführt)

(1) Konstruktion ganzzahliger Repräsentationswerte mithilfe von verzahnten Standardsequenzen

Wir wählen zunächst ein beliebiges $(x_0, y_0) \in X \times Y$ und definieren:

$$f(x_0) := 0 \quad \text{und} \quad g(y_0) := 0 \quad (97)$$

Wir wählen ein $x_1 \in X$ mit $x_1 \succ_x x_0$ als Einheit und definieren:

$$f(x_1) := 1 \quad (98)$$

Die Existenz eines solchen x_1 ist dadurch gesichert, dass die Komponenten von $\succ$ *essentiell* sind (vgl. Eigenschaft (6) in der Definition einer additiv-konjunkten Struktur). Die Essentialität einer Komponente von $\succ$ ist wie folgt definiert: Für eine Relation $\succ$ auf $X \times Y$ heißt die Komponente X *essentiell*, wenn $x_0, x_1 \in X$ und $y \in Y$ existieren, so dass $\neg((x_0, y) \sim (x_1, y))$ gilt. Bei Unabhängigkeit der Komponenten (also der Wohldefiniertheit von $\succ_x$ und $\succ_y$) impliziert dies, dass X essentiell ist, wenn $x_0, x_1 \in X$ existieren, so dass $x_1 \succ_x x_0$ und nicht $x_0 \succ_x x_1$ gilt.

Wir suchen nun ein ausgleichendes Element y_1 , so dass gilt

$$(x_0, y_1) \sim (x_1, y_0) \quad (99)$$

Bei (x_0, y_0) und (x_1, y_0) würde offenbar $(x_1, y_0) \succ (x_0, y_0)$ gelten.

Der Unterschied von y_1 und y_0 kompensiert den Unterschied zwischen x_0 und x_1 also genau.

Beweisskizze der Repräsentation (fortgeführt)

Man müsste verschiedene y_1 ausprobieren, bis eine Beobachter:in bzgl. (x_0, y_1) und (x_1, y_0) indifferent ist.

Die geforderte Additivität der Repräsentationen impliziert dann

$$(x_0, y_1) \sim (x_1, y_0) \Leftrightarrow f(x_0) + g(y_1) = f(x_1) + g(y_0) \quad (100)$$

Mit den bisherigen Festlegungen gilt dann

$$f(x_0) + g(y_1) = f(x_1) + g(y_0) \Leftrightarrow 0 + g(y_1) = 1 + 0 \Rightarrow g(y_1) = 1 \quad (101)$$

Die Existenz eines solchen y_1 wird bei einer additiv-konjunkten Struktur durch die Eigenschaft (4) der *unrestringierten Lösbarkeit* garantiert. Dabei ist eine additiv-konjunkte Struktur gerade dann als unrestringiert lösbar definiert, wenn für alle $x_0, x_1 \in X$ und $y_0 \in Y$ ein $y_1 \in Y$ existiert mit

$$(x_0, y_1) \sim (x_1, y_0), \quad (102)$$

und symmetrisch für X .

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beweisskizze der Repräsentation (fortgeführt)

Wir nutzen nun y_0, x_1, y_1 und suchen ein x_2 , für das die Beobachter:in die Indifferenz anzeigt:

$$(x_2, y_0) \sim (x_1, y_1) \quad (103)$$

Die geforderte Additivität der Repräsentation impliziert dann:

$$(x_2, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow f(x_2) + g(y_0) = f(x_1) + g(y_1) \Leftrightarrow f(x_2) + 0 = 1 + 1 \Rightarrow f(x_2) = 2 \quad (104)$$

Wir erhalten also die nächste ganzzahlige Zuordnung zu einem $x \in X$.

Schließlich setzen wir dieses Vorgehen induktiv fort und erhalten verzahnte Standardfolgen:

$$\begin{aligned} (x_i, y_0) \sim (x_{i-1}, y_1) &\Rightarrow f(x_i) := i \in \mathbb{N}_0 \\ (x_0, y_j) \sim (x_1, y_{j-1}) &\Rightarrow g(y_j) := j \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \quad (105)$$

Die Doppelaufhebung garantiert dabei, dass dieses Vorgehen über mehrere Schritte hinweg funktioniert. Dies wird auch als *strukturelle Konsistenz* bezeichnet, was wir aber nicht weiter vertiefen werden.

(2) Konstruktion rationaler Repräsentationswerte

Durch obiges Vorgehen erhalten wir ganzzahlige Repräsentationen $f : X \rightarrow \mathbb{N}_0$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{N}_0$. Zur Konstruktion rationaler Repräsentationen $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{Q}$ kann man wie folgt vorgehen.

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beweisskizze der Repräsentation (fortgeführt)

Wir wählen ein $x \in X$ und finden unter Nutzung der Strukturbedingungen, insbesondere der unrestringierten Lösbarkeit, ein $y_{1/2} \in Y$, so dass

$$(x, y_0) \sim (x_0, y_{1/2}) \wedge (x_1, y_0) \sim (x, y_{1/2}) \quad (106)$$

Die geforderte Additivität der Repräsentationen impliziert dann das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(x) + g(y_0) &= f(x_0) + g(y_{1/2}) \wedge f(x_1) + g(y_0) = f(x) + g(y_{1/2}) \\ \Leftrightarrow f(x) + 0 &= 0 + g(y_{1/2}) \wedge 1 + 0 = f(x) + g(y_{1/2}) \\ \Leftrightarrow f(x) &= g(y_{1/2}) \wedge 1 = f(x) + g(y_{1/2}) \\ \Leftrightarrow 1 - f(x) &= f(x) + g(y_{1/2}) - g(y_{1/2}) \\ \Leftrightarrow 2f(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (107)$$

Geht man iterativ auf diese Weise vor, so erhält man dyadisch rationale Repräsentationen. Über Standardsequenzen erhält man weiterhin allgemeine rationale Repräsentationen.

(3) Konstruktion reeller Repräsentationswerte

Reelle Repräsentationen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ erhält man schließlich mithilfe *Dedekindscher Schnitte*.

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beweis der Eindeutigkeit

Wir zeigen, dass wenn sowohl für f und g gilt, dass

$$(x_1, y_1) \succcurlyeq (x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1) + g(y_1) \geq f(x_2) + g(y_2) \quad (108)$$

als auch für $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ gilt, dass

$$(x_1, y_1) \succcurlyeq (x_2, y_2) \Leftrightarrow \tilde{f}(x_1) + \tilde{g}(y_1) \geq \tilde{f}(x_2) + \tilde{g}(y_2), \quad (109)$$

Konstanten $\alpha > 0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\tilde{f}(x) = \alpha f(x) + \beta_1 \text{ für alle } x \in X \text{ und } \tilde{g}(y) = \alpha g(y) + \beta_2 \text{ für alle } y \in Y. \quad (110)$$

Grundidee des Beweises ist es, dass die additive Struktur von $(X, Y, \succcurlyeq)$ nicht die absoluten Werte von f und g festlegt, sondern nur die Differenzen zwischen Werten $f(x)$ und $f(x')$ bzw. $g(y)$ und $g(y')$. Dies ist ja bekanntlich das charakterisierende Merkmal von Intervallskalen (man denke z.B. an die Temperaturmessung in Celsius (" $f(x)$ ") und Fahrenheit (" $\tilde{f}(x)$ ")). Der Beweis besteht aus folgenden Schritten:

1. Folgerung von numerischen Differenzgleichungen aus qualitativen Indifferenzen
2. Implikation der Gleichheit von f -Differenzen in der Gleichheit von $\tilde{f}$ -Differenzen
3. Affin-lineare Eindeutigkeiten der Repräsentationen von $\succcurlyeq_x$ und $\succcurlyeq_y$
4. Identität der affin-linearen Konstante α

Beweis der Eindeutigkeit (fortgeführt)

(1) Folgerung von numerischen Differenzgleichungen aus qualitativen Indifferenzen

Nach Annahme gilt

$$\begin{aligned}(x, y') \sim (x', y) &\Leftrightarrow f(x) + g(y') = f(x') + g(y) \\ &\Leftrightarrow f(x) - f(x') = g(y) - g(y')\end{aligned}\tag{111}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}(x, y') \sim (x', y) &\Leftrightarrow \tilde{f}(x) + \tilde{g}(y') = \tilde{f}(x') + \tilde{g}(y) \\ &\Leftrightarrow \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x') = \tilde{g}(y) - \tilde{g}(y')\end{aligned}\tag{112}$$

(2) Implikation der Gleichheit von f -Differenzen in der Gleichheit von $\tilde{f}$ -Differenzen

Wir zeigen, dass wenn zwei Differenzen der Repräsentation f von $\succsim_x$ gleich sind, dann auch die entsprechenden Differenzen der Repräsentation $\tilde{f}$ von $\tilde{\succsim}_x$ gleich sind. Seien dazu zunächst

$$f(x) - f(x') = f(u) - f(u') \text{ für } x, x', u, u' \in X\tag{113}$$

Beweis der Eindeutigkeit (fortgeführt)

Aufgrund der Lösbarkeit von $(X, Y, \succsim)$ gibt es $y, y' \in Y$, so dass

$$(x, y') \sim (x', y) \quad (114)$$

Also gilt mit (1) und obiger Annahme, dass

$$f(x) - f(x') = g(y) - g(y') \quad (115)$$

und mit obiger Annahme, dass

$$f(u) - f(u') = g(y) - g(y') \quad (116)$$

was wiederum äquivalent zu

$$(u, y') \sim (u', y) \quad (117)$$

ist. Insgesamt folgen aus den Eigenschaften der additiven Struktur sowie der Annahme der Differenzidentität

$$f(x) - f(x') = f(u) - f(u') \text{ für } x, x', u, u' \in X \quad (118)$$

also die qualitativen Indifferenzen

$$(x, y') \sim (x', y) \text{ und } (u, y') \sim (u', y) \quad (119)$$

Beweis der Eindeutigkeit (fortgeführt)

Wendet man nun die Repräsentationen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auf diese qualitativen Indifferenzen an, erhält man

$$\tilde{f}(x) + \tilde{g}(y') = \tilde{f}(x') + \tilde{g}(y) \Leftrightarrow \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x') = \tilde{g}(y) - \tilde{g}(y') \quad (120)$$

sowie

$$\tilde{f}(u) + \tilde{g}(y') = \tilde{f}(u') + \tilde{g}(y) \Leftrightarrow \tilde{f}(u) - \tilde{f}(u') = \tilde{g}(y) - \tilde{g}(y'), \quad (121)$$

also, über den "Umweg über $\succsim_y$ ", die Identität der Differenzen

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x') = \tilde{f}(u) - \tilde{f}(u') \quad (122)$$

Die Identität von Differenzen bezüglich der Repräsentation f von $\succsim_x$ impliziert also die Identität von Differenzen bezüglich der Repräsentation $\tilde{f}$ von $\succsim_x$.

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beweis der Eindeutigkeit (fortgeführt)

(3) Affin-lineare Eindeutigkeiten der Repräsentationen von $\succsim_x$ und $\succsim_y$

Wir zeigen als nächstes, dass für ein beliebiges $x \in X$ gilt, dass

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) = \alpha(f(x) - f(x_0)), \quad (123)$$

dass also eine Differenz $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)$ bezüglich $\tilde{f}$ eine positiv skalierte Differenz $f(x) - f(x_0)$ von x und x_0 bezüglich f ist. Dies ergibt sich durch folgende Argumentation. Jede Differenz $f(x) - f(x_0)$ lässt sich durch ganzzahlige, rationale (und schließlich reelle) Vielfache der positiven Einheitsdifferenz $f(x_1) - f(x_0)$ aufbauen. Prinzipiell kann man für jede der dabei auftretenden Gleichheiten von Differenzen mit (2) fordern, dass sie auch unter $\tilde{f}$ erhalten bleiben. Wichtig ist dabei, dass aus der Erhaltung von Gleichheiten von Differenzen nicht folgt, dass auch ihre numerischen Werte unter f und $\tilde{f}$ übereinstimmen. Insbesondere gibt es keinen Grund anzunehmen, dass

$$f(x_1) - f(x_0) = \tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_0) \quad (124)$$

gilt. Die additiv-konjunkte Struktur bedingt nur, dass gleiche Differenzen unter f wieder auf gleiche Differenzen unter $\tilde{f}$ abgebildet werden. Konkret ergibt sich bezüglich der Standardsequenzen bei ganzzahliger Repräsentation etwa:

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow \tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(x_2) - \tilde{f}(x_1). \quad (125)$$

Durch Iteration folgt daraus für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(x_0) = n \cdot (\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_0)). \quad (126)$$

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Beweis der Eindeutigkeit (fortgeführt)

Setzt man

$$a := \tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_0), \quad (127)$$

so erhält man

$$\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(x_0) = na. \quad (128)$$

Analog ergibt sich aus den dyadischen Verfeinerungen, dass für alle $r = \frac{m}{2^k}$ entsprechende Punkte $x_r \in X$ existieren mit

$$\tilde{f}(x_r) - \tilde{f}(x_0) = ra. \quad (129)$$

Da die dyadischen rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen und jede Differenz $f(x) - f(x_0)$ durch geeignete dyadische Approximationen bestimmt ist, folgt schließlich für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0) &= \alpha(f(x) - f(x_0)) \\ \tilde{f}(x) &= \alpha f(x) - \alpha f(x_0) + \tilde{f}(x_0) \\ \tilde{f}(x) &= \alpha f(x) + \beta_1 \text{ mit } \beta_1 := \tilde{f}(x_0) - \alpha f(x_0) \end{aligned} \quad (130)$$

Mit einer analogen Argumentation erhält man

$$\tilde{g}(y) = \tilde{\alpha}g(y) + \beta_2 \quad (131)$$

Beweis der Eindeutigkeit (fortgeführt)

(4) Identität der affin-linearen Konstante α

Wir betrachten eine beliebige Indifferenz

$$(x, y') \sim (x', y) \quad (132)$$

Dann gelten, wie gesehen

$$f(x) - f(x') = g(y) - g(y') \text{ und } \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x') = \tilde{g}(y) - \tilde{g}(y') \quad (133)$$

Mit (3) ergibt sich dann weiterhin

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x') &= \tilde{g}(y) - \tilde{g}(y') \\ \Leftrightarrow \alpha f(x) + \beta_1 - \alpha f(x') - \beta_1 &= \tilde{\alpha} g(y) + \beta_2 - \tilde{\alpha} g(y') - \beta_2 \\ \Leftrightarrow \alpha (f(x) - f(x')) &= \tilde{\alpha} (g(y) - g(y')) \\ \Leftrightarrow \alpha (f(x) - f(x')) &= \tilde{\alpha} (f(x) - f(x')) \end{aligned} \quad (134)$$

Mit der Essentialität folgt dann, dass es von Null verschiedene Differenzen $f(x) - f(x')$ gibt und damit dann direkt

$$\alpha = \tilde{\alpha} \quad (135)$$

Einordnung

Repräsentationstheoretische Grundbegriffe

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Diskussion

Selbstkontrollfragen

Additive Konjunktmessung vs. Differenzmessung

- Additiv-konjunkte Strukturen induzieren Intervallskalen
- Allerdings induzieren auch *Differenzstrukturen* Intervallskalen (Krantz et al. (1971), Kapitel 4)
- Experimentell entsprechen Differenzstrukturen der Messung von Gleichheit von Differenzen

⇒ Man könnte Proband:innen auch direkt nach der Gleichheit von Paardifferenzen einer Komponente fragen

⇒ Maloney (2003) gibt dafür ein modernes Beispiel aus der Wahrnehmungsforschung

Warum ist additive Konjunktmessung "populärer" als Differenzmessung?

- Indifferenzurteile zu Paaren leichter als Urteile über Gleichheit von Differenzen?
- Differenzmessung verlangt metakognitive Vergleichsoperationen zweiter Ordnung?
- Klassische verhaltensökonomische Paradigmen passen direkt zur additiven Konjunktmessung?
- Modelle auf Basis von Differenzen sind oft schwieriger eindeutig zu identifizieren?

Experimentelle Anwendbarkeit der additiven Konjunktmessung

Die definierenden Eigenschaften einer additiv-konjunkten Struktur sind empirisch nicht leicht zu prüfen

Herausforderungen sind dabei insbesondere:

- Komplexe Axiomstruktur (Doppelaufhebung, unrestringierte Lösbarkeit, Essentialität)
- Kombinatorische Komplexität durch sehr viele zu prüfende Urteile
- Statistische Inferenz schwierig (Likelihood analytisch nicht tractable)
- Deterministische Axiome können in realen Daten nicht exakt erfüllt sein
- Probabilistische Erweiterungen sind möglich, aber nicht trivial

Karabatsos (2018) schlägt dennoch einen vielversprechenden Ansatz vor

- Bayesianischer Omnibus-Test der gesamten Aufhebungshierarchie
- Testet Axiome global statt über viele Einzeltests
- Approximate Bayesian Inference via *Synthetic Likelihood*
- Berücksichtigt Unsicherheit in den empirischen Ordnungen

Student & Read (2025) führen diesen Ansatz fort ...

Additive Konjunktmetzung und das Rasch-Modell

Aus Kyngdon (2008)

Item response theory is the dominant field within psychometrics (Borsboom et al. (2004); Embretson & Reise (2000)). Representational measurement theory and conjoint measurement have had very little impact upon psychometrics (Cliff (1992), ..., Schwager (1991)). However, when Michell (2000) labelled psychometrics a 'pathological science' for failing to investigate psychological attributes for quantitative structure, Borsboom & Mellenbergh (2004) rejected Michell's charge in part with the claim the Rasch (1960) model is 'a probabilistic variant of the additive conjoint measurement model' (p. 110). This claim, however, is not new. For over 30 years it has been advanced by many psychometricians that the Rasch model is conjoint measurement or a probabilistic version thereof. It is a proposition strongly believed to be true, as evidenced by the following:

- ...only the Rasch model fulfils the conjoint measurement conditions fully, and so is often preferred in applications where measurement-scale properties are deemed very important. (Embretson & Reise (2000), pp. 149–150)
- Since educational and psychological data are generally not perfectly reliable, the absence of an error theory has limited the usefulness of conjoint measurement models. One striking exception is the widespread use of Rasch models. (Green (1986), p. 141)

Additive Konjunktmetzung und das Rasch-Modell

Aus Kyngdon (2008) (fortgeführt)

- Of critical importance is the realisation that the currently fashionable Rasch item response theory is also an empirical instantiation of the conjoint additivity axioms (Perline et al. (1979)). That is, the construction of a latent variable using Rasch item analysis is no less than the empirical test of quantitative structure for that latent variable. (Barrett (2003), p. 429)
- Apparently not many psychologists are aware that the Rasch (1960) model is a practical realization of conjoint measurement. (Perline et al. (1979), p. 237)

[Kyngdon (2008)] critiques this argument from the perspective of representational measurement theory. It concludes that the Rasch model is not conjoint measurement as the model does not demonstrate the existence of a representation theorem between an empirical relational structure and a numerical relational structure. Psychologists seriously interested in investigating traits for quantitative structure should use the theory of conjoint measurement itself rather than the Rasch model. This is not to say, however, that empirical relationships between conjoint measurement and the Rasch model are precluded.

⇒ Das werden wir in der Einheit zur Item-Response-Theorie bestätigen

Einordnung

Repräsentationstheoretische Grundbegriffe

Repräsentation additiv-konjunkter Strukturen

Diskussion

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie das Wesen der Repräsentationstheorie und ihre Einordnung im modellbasierten Realismus.
2. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff der Relation.
3. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff der Operation.
4. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff des qualitativen Relationssystems.
5. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff des quantitativen Relationssystems.
6. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff des Homomorphismus.
7. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff der Skala.
8. Erläutern Sie das Repräsentationsproblem der Repräsentationstheorie.
9. Erläutern Sie das Eindeutigkeitsproblem der Repräsentationstheorie.
10. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff einer zulässigen Transformation eines Homomorphismus.
11. Definieren Sie die repräsentationstheoretischen Begriffe der Ordinal-, Intervall- und Verhältnisskala.
12. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff der bedeutsamen Aussage.
13. Sind bei Ordinalskalen Aussagen zur Gleichheit von Messwertdifferenzen repräsentationstheoretisch bedeutsam?
14. Sind bei Intervallskalen Aussagen zur Gleichheit von Messwertdifferenzen repräsentationstheoretisch bedeutsam?
15. Sind bei Intervallskalen Aussagen zu Verhältnissen von Messwerten repräsentationstheoretisch bedeutsam?
16. Sind bei Verhältnisskalen Aussagen zu Verhältnissen von Messwerten repräsentationstheoretisch bedeutsam?
17. Erläutern Sie den repräsentationstheoretischen Begriff der bedeutsamen Statistik.
18. Ist der Mittelwert bei einer Ordinalskala eine repräsentationstheoretisch bedeutsame Statistik?
19. Ist der Mittelwert bei einer Intervallskala eine repräsentationstheoretisch bedeutsame Statistik?
20. Erläutern Sie die Grundideen einer Extensivmessung nach Hölder.
21. Erläutern Sie die Problematik für Extensivmessungen in der Psychologie.
22. Erläutern Sie die Grundideen der additiven Konjunktmessung.

- Barrett, P. (2003). Beyond psychometrics: Measurement, non-quantitative structure, and applied numerics. *Journal of Managerial Psychology*, 18(5), 421–439. <https://doi.org/10.1108/02683940310484026>
- Borsboom, D., & Mellenbergh, G. J. (2004). Why Psychometrics is Not Pathological: A Comment on Michell. *Theory & Psychology*, 14(1), 105–120. <https://doi.org/10.1177/0959354304040200>
- Borsboom, D., Mellenbergh, G. J., & Van Heerden, J. (2004). The Concept of Validity. *Psychological Review*, 111(4), 1061–1071. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.111.4.1061>
- Cliff, N. (1992). Abstract measurement and the revolution that never happened. *Psychological Science*, 3(3).
- Embretson, S. E., & Reise, S. (2000). *Item response theory for psychologists*. Psychology Press.
- Green, K. E. (1986). Fundamental Measurement: A Review and Application of Additive Conjoint Measurement in Educational Testing. *The Journal of Experimental Education*, 54(3), 141–147. <https://doi.org/10.1080/00220973.1986.10806412>
- Hölder, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. *Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys.*, C1(53), 1–64.
- Karabatsos, G. (2005). The exchangeable multinomial model as an approach to testing deterministic axioms of choice and measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 49(1), 51–69. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2004.11.001>
- Karabatsos, G. (2018). On Bayesian Testing of Additive Conjoint Measurement Axioms Using Synthetic Likelihood. *Psychometrika*, 83(2), 321–332. <https://doi.org/10.1007/s11336-017-9581-x>
- Krantz, D. H., Luce, D., Suppes, P., & Tversky, A. (1971). *Foundations of Measurement, Vol. I*. Dover Publications.
- Kyngdon, A. (2008). The Rasch Model from the Perspective of the Representational Theory of Measurement. *Theory & Psychology*, 18(1), 89–109. <https://doi.org/10.1177/0959354307086924>

Referenzen II

- Luce, D., Krantz, D., Suppes, P., & Tvers, A. (1990). *Foundations of Measurement, Vol. III*. Dover Publications.
- Luce, D., & Tukey, J. (1964). Simultaneous conjoint measurement: A new type of fundamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 1(1), 1–27. [https://doi.org/10.1016/0022-2496\(64\)90015-X](https://doi.org/10.1016/0022-2496(64)90015-X)
- Maloney, L. T. (2003). Maximum likelihood difference scaling. *Journal of Vision*, 3, 573–585.
- Michell, J. (2000). Normal Science, Pathological Science and Psychometrics. *Theory & Psychology*, 10(5), 639–667. <https://doi.org/10.1177/0959354300105004>
- Pedersen, A. P., Kellen, D., Mayo-Wilson, C., Davis-Stober, C. P., Dunn, J. C., Khan, M. A., Stinchcombe, M. B., Kalish, M. L., Tentori, K., & Haaf, J. (2025). Discourse on measurement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 122(5), e2401229121. <https://doi.org/10.1073/pnas.2401229121>
- Perline, R., Wright, B. D., & Wainer, H. (1979). The Rasch Model as Additive Conjoint Measurement. *Applied Psychological Measurement*, 3(2), 237–255. <https://doi.org/10.1177/014662167900300213>
- Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests* (Expanded ed). University of Chicago Press.
- Roberts, F. S. (1984). *Measurement theory with applications to decisionmaking, utility, and the social sciences*. Cambridge University Press.
- Schwager, K. W. (1991). The Representational Theory of Measurement: An Assessment. *Psychological Bulletin*, 110(3), 618–626.
- Scott, D., & Suppes, P. (1958). Foundational aspects of theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic*, 23(2), 113–128. <https://doi.org/10.2307/2964389>
- Stevens, S. S. (1946). On the Theory of Scales of Measurement. *Science, New Series*, 103(2684), 677–680. <https://www.jstor.org/stable/1671815>

- Student, S. R., & Read, W. S. (2025). Applying Bayesian checks of cancellation axioms for interval scaling in limited samples. *Behavior Research Methods*, 57(11), 305. <https://doi.org/10.3758/s13428-025-02844-7>
- Suppes, P., Krantz, D., Luce, D., & Tversky, A. (1989). *Foundations of Measurement, Vol. II*. Dover Publications.