



Interventionsforschung

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

MSc Umweltpsychologie / Mensch-Technik-Interaktion

SoSe 2026

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(6) Mehrebenen-Designs

Einführung

Zwei-Ebenen-Design

Drei-Ebenen-Design

Powerbetrachtungen

Selbstkontrollfragen

Einführung

Zwei-Ebenen-Design

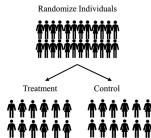
Drei-Ebenen-Design

Powerbetrachtungen

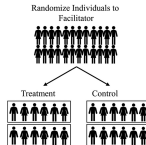
Selbstkontrollfragen

Mehrebenen-Parallelgruppendesign

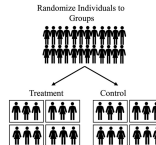
(a) Individual Randomized Trial



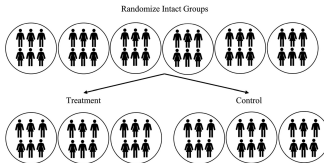
b) Fully Nested Individual Randomized Trial



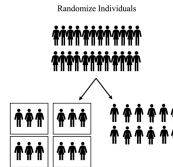
(c) Fully Nested Individual Randomized Trial



(d) Cluster Randomized Trial



(e) 2/1 Partially Nested Individual Randomized Trial



Cox et al. (2025)

Mehrebenen-Parallelgruppendesign

Treatment- und Kontrollbedingung bei hierarchisch verschachtelt experimentellen Daten

Je nachdem, auf welcher Ebene Treatment zugewiesen wird, sind verschiedene Bezeichnungen im Umlauf

Repeated-measures design	Treatment variiert innerhalb von Proband:innen
Individual-randomized design	Treatment auf Proband:innenebene
Group-randomized design	Oft synonym zu Cluster-randomized
Cluster-randomized design	Treatment auf Cluster-Ebene, z.B. Klinik
Nested cluster-randomized design	Mehrere Cluster-Ebenen, Treatment auf einer dieser Ebenen

Letztlich ist die detaillierte Beschreibung des Designs entscheidend.

- Wir betrachten hier nur *orthogonale balancierte* Designs.
- Diese Designs sind analytisch schätz- und evaluierbar, aber natürlich idealisiert.
- Nichtsdestotrotz nutzen wir ihrer numerische Identifikation mithilfe von `nlme`.

Mehrebenen-Parallelgruppendesign

Wie bei Häusern zählen wir Ebenen von unten nach oben.

- ...
- Ebene 3 / Level 3 ist die Ebene, in der Ebene-2-Einheiten verschachtelt sind.
- Ebene 2 / Level 2 ist die Ebene, in der Ebene-1-Einheiten verschachtelt sind.
- Ebene 1 / Level 1 ist die unterste Beobachtungsebene.

Als konkretes Beispiel betrachten wir im komplexesten Fall drei Ebenen

Ebene	Bezeichnung	Beispiele		
3	Interventionsleitende	Therapeut:innen	Nachhaltigkeitscoaches	Teamleitungen
2	Proband:innen	Patient:innen	Mitarbeitende	Bürger:innen
1	Messungen	Pre-/Post	EMA-Zeitpunkte	Tagebuchdaten

Definition (Hierarchisches balanciertes orthogonales LMM)

Ein Linear Mixed Model

$$y = X\beta + Zb + \varepsilon \quad (1)$$

heißt *hierarchisches balanciertes orthogonales LMM*, wenn

- die Beobachtungen in $i = 1, \dots, I$ Ebenen mit jeweils e_i Einheiten *verschachtelt* sind,
- jede Einheit auf Ebene $i + 1$ dieselbe Anzahl u_i an Untereinheiten auf Ebene i besitzt, also

$$e_i = e_{i+1}u_i \text{ für } i = 1, \dots, I \text{ mit } e_{I+1} := 1 \quad (2)$$

gilt, und

- die marginale Datenkovarianz eine *orthogonale Blockstruktur* besitzt, d.h. dass es symmetrische, idempotente und paarweise orthogonale Matrizen $Q_1, \dots, Q_{I+1}$ und positive reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_{I+1}$ gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{I+1} Q_i = I_n \text{ und } \mathbb{C}(y) = \sum_{i=1}^{I+1} \lambda_i Q_i. \quad (3)$$

Bemerkungen

- Die Definition ist ein Hybrid aus moderner LMM- und klassischer ANOVA-Nomenklatur.
- Die Definition lehnt sich an Nelder (1965a), Nelder (1965b) und Houtman and Speed (1983) an.
- In der Terminologie von Nelder (1965a) betrifft die obige Balanciertheit die Block- oder Einheitenstruktur.
- Nelder (1965b) und Houtman and Speed (1983) behandeln Balanciertheit der Treatmentstruktur als zusätzliche Beziehung.
- *Verschachtelt* heißt hier, dass jede Einheit auf Ebene i genau einer Einheit auf Ebene $i + 1$ zugeordnet ist.
- *Balanciert* heißt hier, dass jede Einheit auf Ebene $i + 1$ dieselbe Anzahl u_i von Untereinheiten auf Ebene i hat.
- Zwei Matrizen Q_i und Q_j heißen hier *paarweise orthogonal*, wenn $Q_i Q_j$ eine Nullmatrix ist.
- Wir erinnern daran, dass eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *symmetrisch* heißt, wenn $Q^T = Q$ gilt.
- Wir erinnern daran, dass eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *idempotent* heißt, wenn $Q^2 = Q$ gilt.

Verschachtelung

Jede Einheit auf Ebene i ist eindeutig genau einer Einheit auf Ebene $i + 1$ zugeordnet.

Beispiel für ein verschachteltes Zwei-Ebenen-Design

- 2 Interventionsleitende ($e_2 = 2$)
- 4 Proband:innen ($e_1 = 4$)
- Die Zuordnung der Proband:innen zu den Interventionsleitenden ist eine Funktion

$$z : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2\} \text{ mit z.B. } z(1) = z(2) = z(3) := 1 \text{ und } z(4) := 2. \quad (4)$$

- Bekanntlich ordnen Funktionen jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Zielmenge zu.
- Die Zuordnung der Proband:innen zu den Interventionsleitenden ist also eindeutig.

Beispiel für ein nicht verschachteltes Zwei-Ebenen-Design

- 2 Interventionsleitende ($e_2 = 2$)
- 4 Proband:innen ($e_1 = 4$)
- Eine Funktion

$$z : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2\} \quad (5)$$

existiert nicht, wenn eine Proband:in mehreren Interventionsleitenden zugeordnet ist.

- Z.B. könnte Proband:in 3 teils Interventionsleitender 1 und teils Interventionsleitender 2 zugeordnet sein:

$$z(3) := 1 \text{ und } z(3) := 2. \quad (6)$$

- Die Zuordnung der Proband:innen zu den Interventionsleitenden ist dann nicht eindeutig.

Balancierte Verschachtelung

Beispiel für ein balanciertes Drei-Ebenen-Design ($I := 3$ und $e_{I+1} = e_4 := 1$)

- 2 Interventionsleitenden
- 4 Proband:innen je Interventionsleitender
- 2 Messungen pro Proband:in:

i	Ebene	e_i	e_{i+1}	u_i	$e_{i+1}u_i$	$e_i = e_{i+1}u_i$
3	Interventionsleitende	2	1	2	$1 \cdot 2$	$e_3 = e_4 u_3$
2	Proband:innen	8	2	4	$2 \cdot 4$	$e_2 = e_3 u_2$
1	Messungen	16	8	2	$8 \cdot 2$	$e_1 = e_2 u_1$

Beispiel für ein nicht balanciertes Drei-Ebenen-Design ($I := 3$ und $e_{I+1} = e_4 := 1$)

- 2 Interventionsleitende
- Interventionsleitender (1) betreut 3 Proband:innen, Interventionsleitender (2) betreut 5 Proband:innen
- 2 Messungen pro Proband:in

i	Ebene	e_i	e_{i+1}	u_i	$e_{i+1}u_i$	$e_i = e_{i+1}u_i$
3	Interventionsleitende	2	1	2	$1 \cdot 2$	$e_3 = e_4 u_3$
2	Proband:innen	8	2	$3/5$	–	kein konstantes u_2
1	Messungen	16	8	2	$8 \cdot 2$	$e_1 = e_2 u_1$

Definition (Mehrebenen-Parallelgruppendesign)

Ein *Mehrebenen-Parallelgruppendesign* ist ein orthogonales balanciertes hierarchisches Random-Interzept-LMM

$$y = X\beta + Zb + \varepsilon \quad (7)$$

mit balancierter binärer Treatmentzuweisung auf einer Hierarchieebene und dem Fixed-Effect-Parametervektor

$$\beta := \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

wobei β_0 den Kontrollgruppen-Erwartungswert und β_1 den Treatmenteffekt bezeichnet.

Bemerkung

- Random-Interzept-LMM heißt hier, dass auf jeder Ebene i ein Random-Effects-Term geschätzt wird, der die Einheiten auf dieser Ebene voneinander unterscheidet, aber nicht mit den Fixed Effects interagiert.
- Balancierte binäre Treatmentzuweisung heißt hier, dass es auf der Treatmentebene gleich viele Einheiten in Kontroll- und Treatmentbedingung gibt, und zwar innerhalb jeder Einheit der nächsthöheren Ebene oder, bei Treatmentvariation auf der höchsten Ebene, global.

Theorem (Frequentistische Verteilung der T-Statistik)

Gegeben sei ein Mehrebenen-Parallelgruppendesign mit Fixed-Effect-Parametervektor $\beta := (\beta_0, \beta_1)^T$, bei dem der Treatmenteffekt β_1 auf Ebene i variiert. Seien weiterhin $c := (0, 1)^T$ der Kontrastvektor für den Treatmenteffekt, $\beta_o \in \mathbb{R}^2$ ein Vergleichsparametervektor, und für einen Schätzer $\hat{\theta}$ des Kovarianzkomponentenparameters θ sei

$$\hat{\beta} := \left(X^T V_{\hat{\theta}}^{-1} X \right)^{-1} X^T V_{\hat{\theta}}^{-1} y \quad (9)$$

der Fixed-Effects-Parameterschätzer. Schließlich sei die T-Statistik für den Treatmenteffekt definiert durch

$$T := \frac{c^T \hat{\beta} - c^T \beta_o}{\sqrt{c^T \left(X^T V_{\hat{\theta}}^{-1} X \right)^{-1} c}} \quad (10)$$

Dann gilt

$$T \sim t(\delta, \nu_i) \text{ mit } \delta := \frac{c^T \beta - c^T \beta_o}{\sqrt{c^T \left(X^T V_{\theta}^{-1} X \right)^{-1} c}} \text{ und } \nu_i := e_i - (e_{i+1} + 1). \quad (11)$$

Bemerkungen

- $t(\delta, \nu)$ ist die nichtzentrale t-Verteilung mit Nichtzentralitätsparameter δ und Freiheitsgradparameter ν .
- β_o ist hier der Vergleichsparametervektor der T-Statistik, nicht der Interzeptparameter β_0 des Modells.
- Für Konfidenzintervalle wählt man im Pivotgedanken $c^T \beta_o = c^T \beta$; dann gilt $\delta = 0$.
- Für den Test $H_0 : \beta_1 = 0$ wählt man $c^T \beta_o = 0$; unter H_0 gilt $\delta = 0$, unter H_1 bestimmt δ die Power.

Einführung

Beweisskizze

Im orthogonalen balancierten hierarchischen LMM zerlegt sich die marginale Kovarianzmatrix in unabhängige Fehlerstrata,

$$V_\theta = \sum_{r=1}^{I+1} \lambda_r Q_r, \quad (12)$$

wobei die Q_r symmetrisch, idempotent und paarweise orthogonal sind. Nach dem Satz von Cochran sind die zugehörigen Quadratsummen unabhängig χ^2 -verteilt. Für das Fehlerstratum der Treatmentebene i gilt als Anzahl seiner Freiheitsgrade

$$\text{rg}(Q_i) = e_i - e_{i+1} \quad (13)$$

Da der binäre Treatmenteffekt auf Ebene i einen Freiheitsgrad dieses Stratum erklärt, verbleiben für die Residualvariabilität im Treatmentstratum

$$\nu_i = e_i - (e_{i+1} + 1) \quad (14)$$

Freiheitsgrade. Der Zähler $c^T \hat{\beta} - c^T \beta_o$ ist normalverteilt mit Erwartungswert $c^T \beta - c^T \beta_o$ und Varianz $c^T (X^T V_\theta^{-1} X)^{-1} c$. Der Nenner enthält den unabhängigen, χ^2 -verteilten Varianzschätzer des Treatmentstratum. Damit ist das Verhältnis nichtzentral t-verteilt,

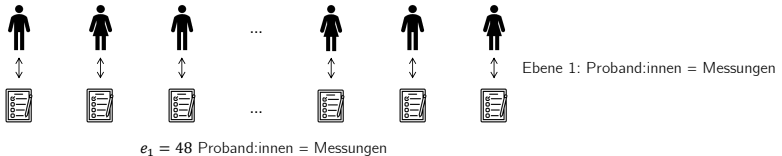
$$T \sim t(\delta, \nu_i) \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{c^T \beta - c^T \beta_o}{\sqrt{c^T (X^T V_\theta^{-1} X)^{-1} c}}. \quad (15)$$

□

Zwei-Ebenen-Designs, Drei-Ebenen-Designs, Powerbetrachtungen

- Wir explizieren im Folgenden Mehrebenen-Parallelgruppendesigns zunehmender Komplexität
- Es geht in jedem Design um den Vergleich von Treatment und Kontrolle, also Inferenz bezüglich β_1 .
- Wir halten die unterste Ebene mit $e_1 = 48$ Messpunkten durchgehend konstant.
- Der Treatmentfaktor ist durchgängig binär kodiert und steht in der zweiten Spalte der Fixed-Effects-Designmatrix.
- Jede Einheit einer Ebene besitzt immer dieselbe Anzahl von Untereinheiten auf der darunterliegenden Ebene.
- Wir variieren in den verschiedenen Szenarien die Anzahl an Ebenen von zwei bis drei.
- In jedem Szenario lassen wir das Treatment jeweils auf jeder Ebene variieren.
- Zuletzt betrachten wir die Frage, wie die Treatmentebene die Power beeinflusst.
- Zuerst betrachten wir allerdings noch den bekannten Spezialfall eines Ein-Ebenen-Designs

Ein-Ebenen-Design



- Wir betrachten $I := 1$ Ebene.
- Ebene 1 besteht aus $e_1 := 48$ unabhängigen Proband:innen.
- Es gibt keine Untereinheiten u_i und keinen Random-Effects-Term.
- Treatment variiert auf Ebene 1, also auf Ebene der unabhängigen Proband:innen.
- Es handelt sich um den Standard Parallelgruppendesign Fall
- Aka Between-Subject-Design, Zweistichproben-T-Test-Design, Einfaktorielles ANOVA Design
- Die hierarchische balancierte orthogonale LMM-Struktur wird in [Theorem 6](#) im Anhang gezeigt.

Ein-Ebenen-Design / Treatmentvariation auf Ebene der Proband:innen

Strukturelle Form

Für Proband:innen $i = 1, \dots, e_1$ seien y_i die Daten. Dann hat das Parallelgruppenmodell die strukturelle Form

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (16)$$

mit

- $x_i := 0$ für Proband:in i in der Kontrollgruppe
- $x_i := 1$ für Proband:in i in der Treatmentgruppe
- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ u.i.v.

Parameterbedeutungen

β_0	Erwartungswert der Kontrollgruppendaten
β_1	Erwartungswertunterschied zwischen Treatment- und Kontrollgruppe
σ_ε^2	Residualvarianz

Ein-Ebenen-Design / Treatmentvariation auf Ebene der Proband:innen

$$y = X\beta + \varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \\ y_{16} \\ y_{17} \\ y_{18} \\ y_{19} \\ y_{20} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{24} \\ y_{25} \\ y_{26} \\ y_{27} \\ y_{28} \\ y_{29} \\ y_{30} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{33} \\ y_{34} \\ y_{35} \\ y_{36} \\ y_{37} \\ y_{38} \\ y_{39} \\ y_{40} \\ y_{41} \\ y_{42} \\ y_{43} \\ y_{44} \\ y_{45} \\ y_{46} \\ y_{47} \\ y_{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\beta_0) + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \\ \varepsilon_{17} \\ \varepsilon_{18} \\ \varepsilon_{19} \\ \varepsilon_{20} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{24} \\ \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{26} \\ \varepsilon_{27} \\ \varepsilon_{28} \\ \varepsilon_{29} \\ \varepsilon_{30} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{35} \\ \varepsilon_{36} \\ \varepsilon_{37} \\ \varepsilon_{38} \\ \varepsilon_{39} \\ \varepsilon_{40} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{42} \\ \varepsilon_{43} \\ \varepsilon_{44} \\ \varepsilon_{45} \\ \varepsilon_{46} \\ \varepsilon_{47} \\ \varepsilon_{48} \end{pmatrix}$$

Überblick

Treatment auf Ebene der unabhängigen Proband:innen

Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt

```
library(MASS)
set.seed(0)
nsim      = 1e4
e         = c(48,1)
X_i       = c(rep(0, e[1]/2), rep(1, e[1]/2))
X         = cbind(rep(1, e[1]), X_i)
beta_tbu  = list(c(5,0), c(5,2))
s_eps     = 1
V_theta   = diag(s_eps, e[1])
V_theta_i = solve(V_theta)
c         = matrix(c(0,1), nrow = 2)
nu_1      = e[1] - (e[2] + 1)
delta     = matrix(NA, nrow = length(beta_tbu), ncol = 1)
Tee       = matrix(NA, nrow = nsim, ncol = length(beta_tbu))
for(b in 1:length(beta_tbu)){
  beta     = matrix(beta_tbu[[b]], nrow = 2)
  num      = t(c) %*% beta
  den      = sqrt(t(c) %*% solve(t(X) %*% V_theta_i %*% X) %*% c)
  delta[b] = num/den
  for(s in 1:nsim){
    y       = mvrnorm(1, X %*% beta, V_theta)
    D       = data.frame(
      y     = as.numeric(y),
      TRM   = X[,2])
    M       = lm(y ~ TRM, data = D)
    Tee[s,b] = summary(M)$coefficients["TRM", "t value"]}}
```

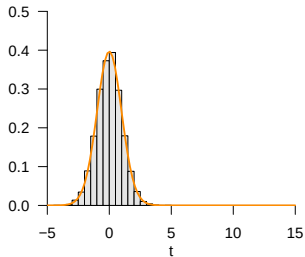
Normalverteilung
Zufallszahlengeneratorzustand
Anzahl Simulationen
Anzahl unabhängiger Proband:innen
Treatmentindikator auf Proband:innenebene
Fixed-Effects-Designmatrix
Fixed-Effects-Parameter für beide Szenarien
Residualvarianzkomponente
Marginale Datenkovarianzmatrix
Inverse der marginalen Datenkovarianzmatrix
Kontrastvektor für Treatmenteffekt
Freiheitsgrade für Treatmenteffekt
Nichtzentralitätsparameter
T-Statistikspeicher
Betaparameteriterationen
Fixed-Effects-Parameter
Zähler des Nichtzentralitätsparameters
Nenner der T-Statistik
Nichtzentralitätsparameter
Simulationsiterationen
Datengeneration
Dataframe
Datenvektor
Treatmentindikator
ALM Schätzung
T-Statistikspeicherung

Treatment auf Ebene der unabhängigen Proband:innen

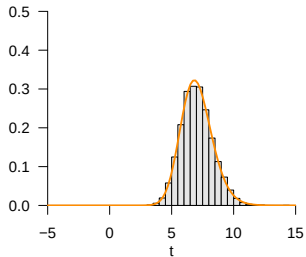
Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt

$$\nu_1 = e_1 - (e_2 + 1) = 48 - (1 + 1) = 46. \quad (17)$$

$\beta_1 = 0, \delta = 0$



$\beta_1 = 2, \delta = 6.93$



Überblick

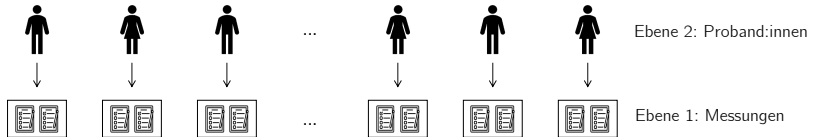
Zwei-Ebenen-Design

Drei-Ebenen-Design

Powerbetrachtungen

Selbstkontrollfragen

Zwei-Ebenen-Design



$e_2 = 24$ Proband:innen, $u_1 = 2$ Messungen pro Proband:in, $e_1 = 48$ Messungen

- Wir betrachten $I := 2$ Ebenen.
- Ebene 2 besteht aus $e_2 := 24$ Proband:innen.
- Jede Proband:in besitzt $u_1 := 2$ Messungen auf Ebene 1.
- Damit gilt $e_1 = e_2 u_1 = 24 \cdot 2 = 48$ Messungen.
- Treatment variiert in den betrachteten Szenarien entweder auf Ebene 1 oder auf Ebene 2.
- Das LMM enthält einen Random-Interzept-Term auf Ebene 2.
- Die hierarchische balancierte orthogonale LMM-Struktur wird in [Theorem 7](#) im Anhang gezeigt.

Zwei-Ebenen-Design

Strukturelle Form

Für Proband:innen $i = 1, \dots, e_2$ und Messungen $j = 1, \dots, u_1$

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_{ij} + b_i + \varepsilon_{ij} \quad (18)$$

mit

$$b_i \sim N(0, \sigma_p^2), \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), b_i \perp \varepsilon_{ij} \quad (19)$$

Bei Treatmentvariation auf Messungsebene

$$x_{i1} := 0 \text{ und } x_{i2} := 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, e_2 \quad (20)$$

Bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene

$$x_{i1} := x_{i2} := 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, e_2/2 \text{ und } x_{i1} := x_{i2} := 1 \text{ für alle } i = e_2/2 + 1, \dots, e_2. \quad (21)$$

Parameterbedeutungen

β_0	Erwartungswert der Kontrollbedingung
β_1	Erwartungswertunterschied zwischen Treatment und Kontrollbedingung
b_i	Proband:in-spezifische Abweichung
σ_p^2	Varianz zwischen Proband:innen
σ_ε^2	Varianz der Messungen innerhalb von Proband:innen

Designmatrixform bei Treatmentvariation auf Messungsebene

Interventionsforschung | © 2026 Dirk Ostwald CC BY 4.0 | Folie 25

Random-Effects-Kovarianzmatrix des Zwei-Ebenen-Designs

[illegible]

Interventionsforschung | © 2026 Dirk Ostwald CC BY 4.0 | Folie 28

Zwei-Ebenen-Design

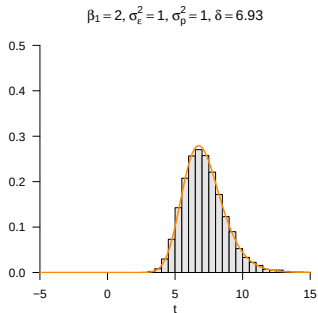
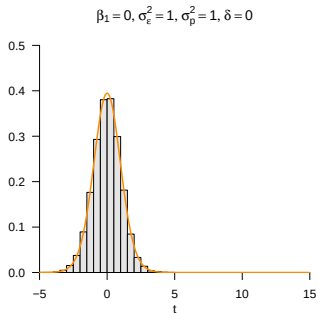
Verteilung der T-Statistik

```
library(MASS)
library(nlme)
set.seed(0)
nsim      = 1e4
e         = c(48,24,1)
u         = c(2,1)
X_t       = list(
  (rep(1,e[2]) %x% matrix(c(1,1,0,1), nrow = u[1])),
  (matrix(c(1,1,0,1), nrow = 2) %x% rep(1,e[2])))
Z_i       = matrix(1, nrow = u[1])
Z         = diag(e[2]) %x% Z_i
beta_tbu  = list(c(5,0), c(5,2))
s_eps     = 1
s_p       = 1
Sigma_b   = s_p*diag(e[2])
Sigma_eps = s_eps*diag(e[1])
V_theta   = Z %%% Sigma_b %%% t(Z) + Sigma_eps
V_theta_i = solve(V_theta)
c         = matrix(c(0,1), nrow = 2)
nu        = rep(NaN, length(X_t))
delta     = array(NaN, dim = c(length(beta_tbu), length(X_t)))
Tee       = array(NaN, dim = c(nsim, length(beta_tbu), length(X_t)))
for (i in 1:length(X_t)){
  X      = X_t[[i]]
  nu[i]  = e[i] - (e[i+1] + 1)
  for(b in 1:length(beta_tbu)){
    beta  = matrix(beta_tbu[b], nrow = 2)
    num   = t(c) %%% beta
    den   = sqrt(t(c) %%% solve(t(X) %%% V_theta_i %%% X) %%% c)
    delta[b,i] = num/den
    for(s in 1:nsim){
      y      = mvrnorm(1, X %%% beta, V_theta)
      D      = data.frame(
        y     = as.numeric(y),
        TRM   = X[2],
        PBN   = as.factor(rep(1:e[2], each = u[1]))
      )
      M      = lme(y ~ TRM, data = D, random = ~ 1 | PBN)
      Tee[s,b,i] = summary(M)$Table["TRM", "t-value"]}]}
```

Normalverteilung
nlme R Paket
Zufallszahlengeneratorzustand
Anzahl Simulationen
Anzahl Messungen, Proband:innen, Design
Anzahl Einheiten/Einheit höherer Ebene
Treatment-Designmatrizen
Treatment auf Messungsebene
Treatment auf Proband:innenebene
RFX-Designmatrix pro Proband:in
RFX-Effects-Designmatrix
FFX-Parameter für beide Szenarien
Residualvarianzkomponente
Proband:innenvarianzkomponente
Random-Effects-Kovarianzmatrix
Residual-Kovarianzmatrix
Marginale Datenkovarianzmatrix
Inverse marginale Datenkovarianzmatrix
Kontrastvektor für Treatmenteffekt
Freiheitsgradparameter Treatmenteffekt
Nichtzentralitätsparameter
T-Statistikspeicher
Treatment-Designmatrixiterationen
Fixed-Effects-Designmatrix
Freiheitsgrade für Treatmenteffekt
Betaparameteriterationen
Fixed-Effects-Parameter
Zähler des Nichtzentralitätsparameters
Nenner der Nichtzentralitätsparameters
Nichtzentralitätsparameter
Simulationsiterationen
Datengeneration
Dataframe
Datenvektor
Treatmentindikator
Proband:innen
LMM Schätzung
T-Statistikspeicherung

Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt bei Treatmentvariation auf Messungsebene

$$\nu_1 = e_1 - (e_2 + 1) = 48 - (24 + 1) = 23. \quad (22)$$



Zwei-Ebenen-Design

Treatment auf Messungsebene

Warum ist δ im Ein-Ebenen-Design identisch mit δ im Zwei-Ebenen-Design bei Treatmentvariation auf Messungsebene?

Wir halten zunächst fest, dass mit

$$c = (0, 1)^T, \quad c^T \beta_o = 0 \text{ und } (X^T V_\theta^{-1} X)^{-1} = \mathbb{C}(\hat{\beta}) \quad (23)$$

gilt, dass

$$\delta = \frac{c^T \beta - c^T \beta_o}{\sqrt{c^T (X^T V_\theta^{-1} X)^{-1} c}} = \frac{c^T \beta}{\sqrt{c^T \mathbb{C}(\hat{\beta}) c}} = \frac{\beta_1}{\sqrt{(\mathbb{C}(\hat{\beta}))_{22}}} = \frac{\beta_1}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\beta}_1)}}. \quad (24)$$

Weiterhin halten wir unter Verweis auf [PDWP Theorem 41.2](#) fest, dass im Ein-Ebenen-Design mit den Stichprobenmitteln

$$\bar{y}_1 := \frac{2}{e_1} \sum_{i=1}^{e_1/2} y_i \text{ und } \bar{y}_2 := \frac{2}{e_1} \sum_{i=e_1/2+1}^{e_1} y_i \quad (25)$$

von Kontrollgruppe und Treatmentgruppe gilt, dass

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1. \quad (26)$$

Schließlich gilt mit [Theorem 9, \(1\)](#) im Anhang, dass im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} (y_{i2} - y_{i1}). \quad (27)$$

Wir bestimmen nun die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Ein-Ebenen-Design und im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene mit den Rechenregeln für Varianzen und Kovarianzen aus [PDWP 3.6 Varianzen](#) bzw. [PDWP 3.7 Kovarianzen](#). Für die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Ein-Ebenen-Design erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) &= \mathbb{V}(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \\ &= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1) - 2\mathbb{C}(\bar{y}_2, \bar{y}_1) \\ &= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1) - 2\mathbb{C}\left(\frac{2}{e_1} \sum_{j=e_1/2+1}^{e_1} y_j, \frac{2}{e_1} \sum_{i=1}^{e_1/2} y_i\right) \\ &= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1) - 2\frac{4}{e_1^2} \sum_{j=e_1/2+1}^{e_1} \sum_{i=1}^{e_1/2} \mathbb{C}(y_j, y_i) \\ &= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1) - 2\frac{4}{e_1^2} \sum_{j=e_1/2+1}^{e_1} \sum_{i=1}^{e_1/2} 0 \\ &= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1)\end{aligned}\tag{28}$$

und damit weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) &= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1) \\&= \mathbb{V}\left(\frac{2}{e_1} \sum_{j=e_1/2+1}^{e_1} y_j\right) + \mathbb{V}\left(\frac{2}{e_1} \sum_{i=1}^{e_1/2} y_i\right) \\&= \frac{4}{e_1^2} \sum_{j=e_1/2+1}^{e_1} \mathbb{V}(y_j) + \frac{4}{e_1^2} \sum_{i=1}^{e_1/2} \mathbb{V}(y_i) \\&= \frac{4}{e_1^2} \sum_{j=e_1/2+1}^{e_1} \sigma_\varepsilon^2 + \frac{4}{e_1^2} \sum_{i=1}^{e_1/2} \sigma_\varepsilon^2 \\&= \frac{4}{e_1^2} \frac{e_1}{2} \sigma_\varepsilon^2 + \frac{4}{e_1^2} \frac{e_1}{2} \sigma_\varepsilon^2 \\&= \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{e_1} + \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{e_1} \\&= \frac{4\sigma_\varepsilon^2}{e_1}.\end{aligned}\tag{29}$$

Für die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} (y_{i2} - y_{i1})\right) \\ &= \frac{1}{e_2^2} \sum_{i=1}^{e_2} \mathbb{V}(y_{i2} - y_{i1}) \\ &= \frac{1}{e_2^2} \sum_{i=1}^{e_2} \mathbb{V}((\beta_0 + \beta_1 + b_i + \varepsilon_{i2}) - (\beta_0 + b_i + \varepsilon_{i1})) \\ &= \frac{1}{e_2^2} \sum_{i=1}^{e_2} \mathbb{V}(\beta_1 + \varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1}) \\ &= \frac{1}{e_2^2} \sum_{i=1}^{e_2} \mathbb{V}(\varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1})\end{aligned}\tag{30}$$

und damit weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) &= \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} \mathbb{V}(\varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1}) \\&= \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} (\mathbb{V}(\varepsilon_{i2}) + \mathbb{V}(\varepsilon_{i1}) - 2\mathbb{C}(\varepsilon_{i2}, \varepsilon_{i1})) \\&= \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} (\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 - 2 \cdot 0) \\&= \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} 2\sigma_\varepsilon^2 \\&= \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{e_2} \\&= \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{\frac{1}{2}e_1} \\&= \frac{4\sigma_\varepsilon^2}{e_1}.\end{aligned}\tag{31}$$

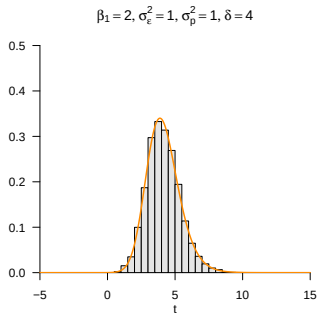
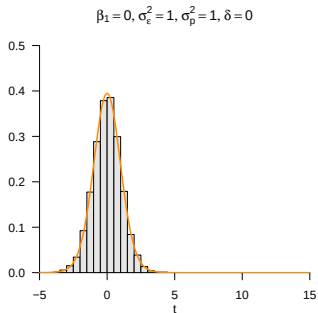
Die Varianz von $\hat{\beta}_1$ ist damit im Ein-Ebenen-Design und im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene gleich. In beiden Fällen gilt also, dass

$$\delta = \frac{\beta_1}{\sqrt{4\sigma_{\varepsilon}^2/e_1}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 1/48}} \approx 6.93. \quad (32)$$

Intuitiv lässt sich dies damit erklären, dass bei Treatmentvariation auf Messungsebene der proband:innenspezifische Random-Interzept aus der Differenz zwischen Treatment- und Kontrolle herausfällt, sodass die Proband:innenvarianz im Nenner des Nichtzentralitätsparameters nicht mehr enthalten ist. Es verbleibt also nur die Residualvarianzkomponente im Nenner des Nichtzentralitätsparameters, sodass die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Ein-Ebenen-Design und im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene gleich ist.

Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene

$$\nu_2 = e_2 - (e_3 + 1) = 24 - (1 + 1) = 22. \quad (33)$$



Treatment auf Ebene der Proband:innen

Warum ist δ kleiner als bei Treatmentvariation auf Messungsebene?

Wie bereits erläutert, gilt, dass

$$\delta = \frac{\beta_1}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\beta}_1)}}. \quad (34)$$

Für die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene haben wir gezeigt, dass

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{4\sigma_\varepsilon^2}{e_1}. \quad (35)$$

Wir bestimmen nun die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Proband:innenebene. Dazu halten wir zunächst fest, dass mit

$$\bar{y}_i := \frac{1}{2}(y_{i1} + y_{i2}), \quad \bar{y}_1 := \frac{2}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i, \quad \bar{y}_2 := \frac{2}{e_2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_j. \quad (36)$$

Nach [Theorem 9, \(2\)](#) im Anhang gilt dann

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1. \quad (37)$$

Der Treatmenteffekt wird hier also durch den Unterschied der Mittelwerte von Treatmentgruppe und Kontrollgruppe der proband:innenspezifischen Mittelwerte von Messung 1 und Messung 2 geschätzt.

Zum Bestimmen der Varianz von $\hat{\beta}_1$ halten wir zunächst fest, dass mit [Theorem 10](#) und der im Beweis verwendeten Unabhängigkeitsannahme im Anhang gilt, dass

$$\mathbb{C}(\bar{y}_2, \bar{y}_1) = 0 \text{ und } \mathbb{C}\left(b_i, \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, e_2. \quad (38)$$

Wir halten weiterhin fest, dass mit $x_i := x_{i1} = x_{i2}$ für die Varianz von $\bar{y}_i$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{y}_i) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{2}(y_{i1} + y_{i2})\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{2}((\beta_0 + \beta_1 x_i + b_i + \varepsilon_{i1}) + (\beta_0 + \beta_1 x_i + b_i + \varepsilon_{i2}))\right) \\ &= \mathbb{V}\left(b_i + \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \\ &= \mathbb{V}(b_i) + \mathbb{V}\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) + 2\mathbb{C}\left(b_i, \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \\ &= \sigma_p^2 + \frac{1}{4}\mathbb{V}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}) + 0 \\ &= \sigma_p^2 + \frac{1}{4}(\mathbb{V}(\varepsilon_{i1}) + \mathbb{V}(\varepsilon_{i2}) + 2\mathbb{C}(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2})) \\ &= \sigma_p^2 + \frac{1}{4}(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 0) \\ &= \sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Zwei-Ebenen-Design

Für die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Proband:innenebene erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{\beta}_1) &= \mathbb{V}(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \\&= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1) - 2\mathbb{C}(\bar{y}_2, \bar{y}_1) \\&= \mathbb{V}(\bar{y}_2) + \mathbb{V}(\bar{y}_1) \\&= \mathbb{V}\left(\frac{2}{e_2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_j\right) + \mathbb{V}\left(\frac{2}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i\right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \mathbb{V}(\bar{y}_j) + \frac{4}{e_2^2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \mathbb{V}(\bar{y}_i) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \left(\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{4}{e_2^2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \left(\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \frac{e_2}{2} \left(\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{4}{e_2^2} \frac{e_2}{2} \left(\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) \\&= \frac{4}{e_2} \left(\sigma_p^2 + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) \\&= \frac{4\sigma_p^2 + 2\sigma_\varepsilon^2}{e_2} \\&= \frac{8\sigma_p^2 + 4\sigma_\varepsilon^2}{e_1}.\end{aligned}\tag{40}$$

Insgesamt haben wir also für die Varianz des Treatmenteffektschätzers im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene

$$\mathbb{V}_m(\hat{\beta}_1) = \frac{4\sigma_\varepsilon^2}{e_1} \quad (41)$$

und für die Varianz des Treatmenteffektschätzers im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Proband:innenebene

$$\mathbb{V}_p(\hat{\beta}_1) = \frac{8\sigma_p^2 + 4\sigma_\varepsilon^2}{e_1}. \quad (42)$$

Bei gleichem $\beta_1 > 0$ und mit $\sigma_p^2 > 0$ gilt damit, dass

$$\mathbb{V}_p(\hat{\beta}_1) > \mathbb{V}_m(\hat{\beta}_1) \Rightarrow \delta_p < \delta_m. \quad (43)$$

Gröber formuliert gilt also, dass die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Proband:innenebene größer ist als die Varianz von $\hat{\beta}_1$ im Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Messungsebene, da bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene zusätzlich zur Residualvarianzkomponente der Messung auch die Proband:innenvarianzkomponente in der Varianz im Nenner des Nichtzentralitätsparameters enthalten ist.

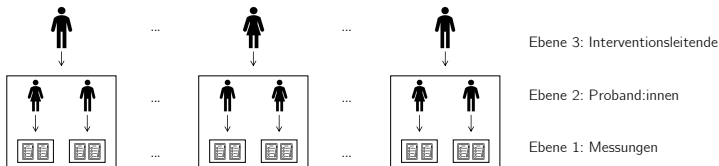
Überblick

Zwei-Ebenen-Design

Drei-Ebenen-Design

Powerbetrachtungen

Selbstkontrollfragen



$e_3 = 6$ Interventionsleitende, $u_2 = 4$ Proband:innen, $e_2 = 24$ Proband:innen, $u_1 = 2$ Messungen, $e_1 = 48$ Messungen

- Wir betrachten $I := 3$ Ebenen.
- Ebene 3 besteht aus $e_3 := 6$ Interventionsleitenden.
- Jede Interventionsleitende besitzt $u_2 := 4$ Proband:innen auf Ebene 2.
- Damit gilt $e_2 = e_3 u_2 = 6 \cdot 4 = 24$ Proband:innen.
- Jede Proband:in besitzt $u_1 := 2$ Messungen auf Ebene 1.
- Damit gilt $e_1 = e_2 u_1 = 24 \cdot 2 = 48$ Messungen.
- Treatment variiert in den betrachteten Szenarien auf Ebene 1, Ebene 2 oder Ebene 3.
- Das LMM enthält Random-Interzept-Terme auf Ebene 3 und Ebene 2.
- Die hierarchische balancierte orthogonale LMM-Struktur wird in [Theorem 8](#) im Anhang gezeigt.

Drei-Ebenen-Design

Strukturelle Form

Für Interventionsleitende $i = 1, \dots, e_3$, Proband:innen $j = 1, \dots, u_2$ und Messungen $k = 1, \dots, u_1$

$$y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 x_{ijk} + b_i + b_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (44)$$

mit

$$b_i \sim N(0, \sigma_l^2), \quad b_{ij} \sim N(0, \sigma_p^2), \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad b_i \perp b_{ij} \perp \varepsilon_{ijk}. \quad (45)$$

Bei Treatmentvariation auf Messungsebene

$$x_{ij1} := 0 \text{ und } x_{ij2} := 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, e_3 \text{ und } j = 1, \dots, u_2. \quad (46)$$

Bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene

$$x_{ij1} := x_{ij2} := 0 \text{ für } j = 1, \dots, u_2/2 \text{ und } x_{ij1} := x_{ij2} := 1 \text{ für } j = u_2/2 + 1, \dots, u_2 \text{ für alle } i. \quad (47)$$

Bei Treatmentvariation auf Interventionsleitendenebene

$$x_{ijk} := 0 \text{ für } i = 1, \dots, e_3/2 \text{ und } x_{ijk} := 1 \text{ für } i = e_3/2 + 1, \dots, e_3 \text{ für alle } j, k. \quad (48)$$

Parameterbedeutungen

β_0	Erwartungswert der Kontrollbedingung
β_1	Erwartungswertunterschied zwischen Treatment und Kontrollbedingung
b_i	Interventionsleitenden-spezifische Abweichung
b_{ij}	Proband:in-spezifische Abweichung innerhalb von Interventionsleitenden i
σ_l^2	Varianz zwischen Interventionsleitenden
σ_p^2	Varianz zwischen Proband:innen innerhalb von Interventionsleitenden
σ_ε^2	Varianz der Messungen innerhalb von Proband:innen

Interventionsforschung | © 2026 Dirk Ostwald CC BY 4.0 | Folie 45

Interventionsforschung | © 2026 Dirk Ostwald CC BY 4.0 | Folie 46

Interventionsforschung | © 2026 Dirk Ostwald CC BY 4.0 | Folie 47

Drei-Ebenen-Design

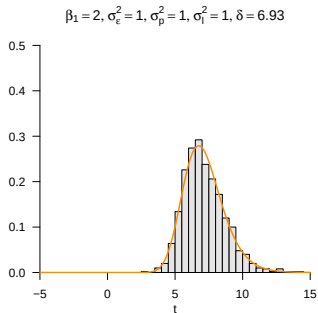
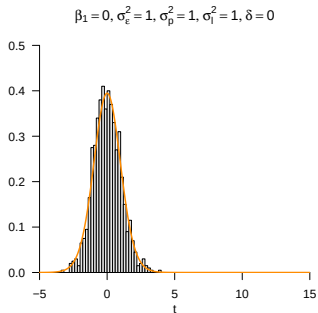
Verteilung der T-Statistik

```
library(MASS)
library(nlme)
set.seed(0)
nsim      = 1e4
e         = c(48,24,6,1)
u         = c(2,4,6)
X_t       = list(
  (rep(1,e[2]) %x% matrix(c(1,1,0,1), nrow = u[1])),
  (rep(1,e[3]) %x% (matrix(c(1,1,0,1), nrow = 2) %x% rep(1,u[2]))),
  (matrix(c(1,1,0,1), nrow = 2) %x% rep(1,e[1]/2)))
Z_l       = diag(e[3]) %x% rep(1, u[2]*u[1])
Z_p       = diag(e[2]) %x% rep(1, u[1])
Z         = cbind(Z_l, Z_p)
beta_tbu  = list(c(5,0), c(5,2))
s_eps     = 1
s_p       = 1
s_l       = 1
Sigma_b   = diag(c(rep(s_l, e[3]), rep(s_p, e[2])))
Sigma_eps = s_eps*diag(e[1])
V_theta   = Z %*% Sigma_b %*% t(Z) + Sigma_eps
V_theta_i = solve(V_theta)
c         = matrix(c(0,1), nrow = 2)
nu        = rep(NA, length(X_t))
delta     = array(NA, dim = c(length(beta_tbu), length(X_t)))
Tee       = array(NA, dim = c(nsim, length(beta_tbu), length(X_t)))
for(i in 1:length(X_t)){
  X      = X_t[[i]]
  nu[i]  = e[i] - (e[i+1] + 1)
  for(b in 1:length(beta_tbu)){
    beta  = matrix(beta_tbu[b], nrow = 2)
    num   = t(c) %*% beta
    den   = sqrt(t(c) %*% solve(t(X) %*% V_theta_i %*% X) %*% c)
    delta[b,i] = num/den
  }
  for(s in 1:nsim){
    y      = mvrnorm(1, X %*% beta, V_theta)
    D      = data.frame(
      y      = as.numeric(y),
      y      = y,
      TRM    = X[,2],
      IVL    = as.factor(rep(1:e[3], each = u[2]*u[1])),
      PBN    = as.factor(rep(1:e[2], each = u[1]))
    )
    M       = lme(y ~ TRM, data = D, random = ~ 1 | IVL/PBN)
    Tee[s,b,i] = summary(M)$Table["TRM", "t-value"]}]}
```

```
# Normalverteilung
# nlme R Paket
# Zufallszahlengeneratorzustand
# Anzahl Simulationen
# Anzahl Messungen, Proband:, IVL
# Einheiten pro Einheit höhere Ebene
# Treatment-Designmatrizen
# Treatment auf Messungsebene
# Treatment auf Proband:innenebene
# Treatment auf IVL-Ebene
# RFX-Designmatrix IVL
# RFX-Designmatrix Proband:innen
# RFX-Designmatrix
# FFX-Parameter für beide Szenarien
# Residualvarianzkomponente
# Proband:innenvarianzkomponente
# IVL-Varianzkomponente
# Random-Effects-Kovarianzmatrix
# Residual-Kovarianzmatrix
# Marginale Datenkovarianzmatrix
# Inverse marginalen Datenkovarianz
# Kontrastvektor für Treatmenteffekt
# Freiheitsgrade für Treatmenteffekt
# Nichtzentralitätsparameter
# T-Statistikspeicher
# Treatment-Designmatrixiterationen
# Fixed-Effects-Designmatrix
# Freiheitsgrade für Treatmenteffekt
# Betaparameteriterationen
# Fixed-Effects-Parameter
# Zähler Nichtzentralitätsparameter
# Nenner Nichtzentralitätsparameter
# Nichtzentralitätsparameter
# Simulationsiterationen
# Datengeneration
# Dataframe
# Datenvektor
# Treatmentindikator
# Interventionsleitende
# Proband:innen
# LMM Schätzung
# T-Statistikspeicherung
```

Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt bei Treatmentvariation auf Messungsebene

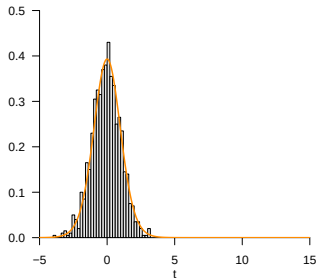
$$\nu_1 = e_1 - (e_2 + 1) = 48 - (24 + 1) = 23. \quad (49)$$



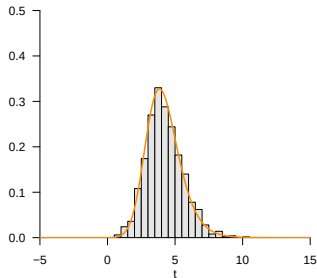
Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene

$$\nu_2 = e_2 - (e_3 + 1) = 24 - (6 + 1) = 17. \quad (50)$$

$$\beta_1 = 0, \sigma_\epsilon^2 = 1, \sigma_p^2 = 1, \sigma_l^2 = 1, \delta = 0$$



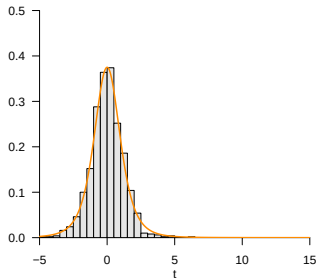
$$\beta_1 = 2, \sigma_\epsilon^2 = 1, \sigma_p^2 = 1, \sigma_l^2 = 1, \delta = 4$$



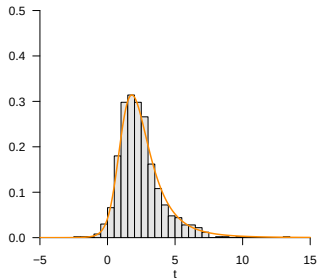
Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt bei Treatmentvariation auf Interventionsleitenebene

$$\nu_3 = e_3 - (e_4 + 1) = 6 - (1 + 1) = 4. \quad (51)$$

$$\beta_1 = 0, \sigma_e^2 = 1, \sigma_p^2 = 1, \sigma_l^2 = 1, \delta = 0$$



$$\beta_1 = 2, \sigma_e^2 = 1, \sigma_p^2 = 1, \sigma_l^2 = 1, \delta = 2.09$$



Einführung

Zwei-Ebenen-Design

Drei-Ebenen-Design

Powerbetrachtungen

Selbstkontrollfragen

Freiheitsgradparameter der Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt

Design	Treatmentebene	$\nu_i = e_i - (e_{i+1} + 1)$	ν
Zwei-Ebenen-Design	Proband:in	$\nu_2 = e_2 - (e_3 + 1) = 24 - (1 + 1) =$	22
Zwei-Ebenen-Design	Messung	$\nu_1 = e_1 - (e_2 + 1) = 48 - (24 + 1) =$	23
Drei-Ebenen-Design	Interventionsleitende	$\nu_3 = e_3 - (e_4 + 1) = 6 - (1 + 1) =$	4
Drei-Ebenen-Design	Proband:in	$\nu_2 = e_2 - (e_3 + 1) = 24 - (6 + 1) =$	17
Drei-Ebenen-Design	Messung	$\nu_1 = e_1 - (e_2 + 1) = 48 - (24 + 1) =$	23

(52)

Freiheitsgradparameter der Verteilung der T-Statistik für den Treatmenteffekt

Grob gilt:

$$\nu_i = \text{Anzahl der Einheiten auf Treatmentebene} - \text{Über der Treatmentebene liegende Kontexte.} \quad (53)$$

Zwei-Ebenen-Design

- Bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene entsprechen die 48 Messungen für den Treatmentvergleich nicht 48 unabhängigen Informationseinheiten, weil je 2 Messungen zu derselben Proband:in gehören. Entscheidend sind die 24 Proband:innenmittelwerte.
- Bei Treatmentvariation auf Messungsebene beruht der Treatmentvergleich im Kern auf 24 unabhängigen Within-Proband:innen-Vergleichen, weil je 2 Messungen an derselben Proband:in erhoben werden.

Drei-Ebenen-Design

- Bei Treatmentvariation auf Ebene der Interventionsleitendenebene gibt es nur 6 unabhängige Informationseinheiten, weil alle 48 Messungen zu denselben 6 Leitenden gehören. Nach Abzug der 1 Überkontextinformationseinheit bleiben 4 Freiheitsgrade für den Treatmenteffektvergleich.
- Bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene teilen sich die 24 Proband:innen in Gruppen von 4 jeweils denselben Leitenden-spezifischen zufälligen Offset. Ein Teil der Variation gehört damit zu den 6 gemeinsamen Leitendenkontexten.
- Bei Treatmentvariation auf Messungsebene erfolgt der Treatmentvergleich innerhalb der 24 Proband:innen. Gemeinsame Proband:innen- und Leitendenanteile fallen im Within-Proband:innen-Vergleich wieder heraus.

Theorem (Testgütefunktion des zweiseitigen Treatmenteffekttests)

Gegeben sei ein Drei-Ebenen-Parallelgruppendesign mit

$$y = X_i \beta + Zb + \varepsilon, \quad \beta := (\beta_0, \beta_1)^T, \quad (54)$$

wobei $X_i = (1_{48}, x_i)$ die Fixed-Effects-Designmatrix für eine Treatmentzuweisung auf Ebene i bezeichnet. Für

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \beta_1 \neq 0 \quad (55)$$

sei

$$T_i := \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{c^T (X_i^T V_\theta^{-1} X_i)^{-1} c}}, \quad c := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Unter $\beta_1 \neq 0$ gilt

$$T_i \sim t(\delta_i, \nu_i), \quad \delta_i := \frac{\beta_1}{\sqrt{c^T (X_i^T V_\theta^{-1} X_i)^{-1} c}}, \quad \nu_i := e_i - (e_{i+1} + 1). \quad (57)$$

Für $\alpha_0 \in (0, 1)$, $k_i := t_{1-\alpha_0/2, \nu_i}$ und den zweiseitigen Test ϕ_i ist die Testgütefunktion

$$q_i(\beta_1) = 1 - \Psi(k_i; \delta_i, \nu_i) + \Psi(-k_i; \delta_i, \nu_i), \quad (58)$$

wobei $\Psi(\cdot; \delta_i, \nu_i)$ die KVF der nichtzentralen t -Verteilung bezeichnet.

Bemerkung

- Zum Hintergrund siehe [PDWP Definition 33.10 Testgütefunktion](#).

Beweis

Die Herleitung ist analog zur Herleitung der **PDWP Theorem 33.2 Testgütefunktion des zweiseitigen Einstichproben-T-Tests**. Der zweiseitige Test lehnt H_0 genau dann ab, wenn T_i im Ablehnungsbereich

$$A_i := \{t \in \mathbb{R} : |t| \geq k_i\} \quad (59)$$

liegt. Also gilt für jedes $\beta_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} q_i(\beta_1) &:= \mathbb{P}_{\beta_1}(\phi_i(y) = 1) \\ &= \mathbb{P}_{\beta_1}(T_i \in A_i) \\ &= \mathbb{P}_{\beta_1}(T_i \leq -k_i) + \mathbb{P}_{\beta_1}(T_i > k_i) \\ &= \mathbb{P}_{\beta_1}(T_i \leq -k_i) + 1 - \mathbb{P}_{\beta_1}(T_i \leq k_i). \end{aligned} \quad (60)$$

Aus der frequentistischen Verteilung der T-Statistik gilt unter $\beta_1 \neq 0$

$$T_i \sim t(\delta_i, \nu_i), \quad \delta_i = \frac{\beta_1}{\sqrt{c^T (X_i^T V_\theta^{-1} X_i)^{-1} c}}. \quad (61)$$

Damit ist $\mathbb{P}_{\beta_1}(T_i \leq a) = \Psi(a; \delta_i, \nu_i)$ und folglich

$$q_i(\beta_1) = \Psi(-k_i; \delta_i, \nu_i) + 1 - \Psi(k_i; \delta_i, \nu_i). \quad (62)$$

Dies ist die behauptete Darstellung. □

Theorem (Testgütevergleich bei gleicher Effektstärke)

Betrachtet sei das Drei-Ebenenmodell mit

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 1, \quad \sigma_p^2 = 1, \quad \sigma_l^2 = 1, \quad (63)$$

Signifikanzniveau $\alpha_0 = .05$ und Treatmenteffekt $\beta_1 = 2$. Für Treatment auf Messungsebene, Proband:innenebene und Interventionsleitenebene gilt

Treatmentebene	ν_i	δ_i	$q_i(2)$
Interventionsleitende	4	2.089	.360
Proband:innen	17	4.000	.964
Messung	23	6.928	.999998

(64)

Insbesondere gilt in diesem Szenario

$$q_1(2) > q_2(2) > q_3(2). \quad (65)$$

Bemerkungen

- Bei gleicher Anzahl an Messungen und gleicher Effektstärke ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test für das vorliegende Drei-Ebenenmodell den Wert 1 annimmt (also seine Testgüte) bei gleichbleibender Effektstärke β_1 , Anzahl an Datenpunkten e_1 und Signifikanzschwelle α_0 dann am größten, wenn Treatment auf der niedrigsten betrachteten Ebene variiert wird.

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass im Drei-Ebenen-Modell bezüglich der Fixed-Effects-Designmatrizen X_i für die drei Treatmentzuweisungen gilt:

$$x_1 = 1_{24} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bei Treatmentvariation auf Messungsebene} \quad (66)$$

$$x_2 = 1_6 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes 1_2 \quad \text{bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene} \quad (67)$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes 1_8 \quad \text{bei Treatmentvariation auf Interventionsleitenebene.} \quad (68)$$

Weiterhin gilt für die marginale Datenkovarianzmatrix im Drei-Ebenen-Modell offenbar

$$V_\theta = \sigma_\varepsilon^2 I_{48} + \sigma_p^2 (I_{24} \otimes 1_{22}) + \sigma_l^2 (I_6 \otimes 1_{88}). \quad (69)$$

Beweis (fortgeführt)

Für $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_p^2 = \sigma_l^2 = 1$ ist

$$V_{\theta} = I_{48} + (I_{24} \otimes 1_{22}) + (I_6 \otimes 1_{88}). \quad (70)$$

Mit $X_i = (1_{48}, x_i)$ ergibt direktes Einsetzen

$$\begin{aligned} (X_1^T V_{\theta}^{-1} X_1)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/4 & -1/24 \\ -1/24 & 1/12 \end{pmatrix}, \\ (X_2^T V_{\theta}^{-1} X_2)^{-1} &= \begin{pmatrix} 7/24 & -1/8 \\ -1/8 & 1/4 \end{pmatrix} \\ (X_3^T V_{\theta}^{-1} X_3)^{-1} &= \begin{pmatrix} 11/24 & -11/24 \\ -11/24 & 11/12 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (71)$$

Beweis (fortgeführt)

Da $c = (0, 1)^T$, folgt aus den rechten unteren Matrixeinträgen

$$\mathbb{V}_i(\hat{\beta}_1) := c^T (X_i^T V_\theta^{-1} X_i)^{-1} c \quad (72)$$

also

$$\mathbb{V}_1(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{V}_2(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{V}_3(\hat{\beta}_1) = \frac{11}{12}. \quad (73)$$

Für $\beta_1 = 2$ erhält man damit

$$\delta_1 = \frac{2}{\sqrt{1/12}} = 4\sqrt{3} = 6.928, \delta_2 = \frac{2}{\sqrt{1/4}} = 4, \delta_3 = \frac{2}{\sqrt{11/12}} = 2.089. \quad (74)$$

Die Freiheitsgradparameter sind

$$\nu_1 = 48 - (24 + 1) = 23, \quad \nu_2 = 24 - (6 + 1) = 17, \quad \nu_3 = 6 - (1 + 1) = 4. \quad (75)$$

Mit $k_i = t_{1-.05/2, \nu_i}$ und [Theorem 4](#) folgt dann

$$q_1(2) = .999998, \quad q_2(2) = .964, \quad q_3(2) = .360. \quad (76)$$

Damit ist $q_1(2) > q_2(2) > q_3(2)$ gezeigt.

□

Testgüte und Treatmentebene

- Bei gleicher roher Effektstärke β_1 ist die Testgüte im vorliegenden Drei-Ebenenmodell am größten, wenn Treatment auf der niedrigsten betrachteten Ebene variiert. Der Grund ist nicht nur die Anzahl der Datenpunkte, sondern die Kombination aus Nichtzentralitätsparameter

$$\delta_i = \frac{\beta_1}{\sqrt{c^T (X_i^T V_\theta^{-1} X_i)^{-1} c}} \quad (77)$$

und Freiheitsgradparameter

$$\nu_i = e_i - (e_{i+1} + 1). \quad (78)$$

- Intuitiv gilt, dass je höher die Treatmentzuweisung in der Hierarchie liegt, desto weniger unabhängige Einheiten den Treatmenteffekt tragen. Treatment auf höheren Ebenen kann dennoch inhaltlich notwendig sein, zum Beispiel wegen Interventionslogik, Kontamination oder organisatorischer Machbarkeit. Entsprechende Testgüte- und Stichprobenumfangsfragen werden in der aktuellen Literatur zu Mehrebenenendesigns ausführlich diskutiert, etwa bei Murray et al. (2004), Teerenstra et al. (2008), Preisser et al. (2010), Heo et al. (2013), Esserman et al. (2013), Wang et al. (2022) und Moerbeek (2024).

Einführung

Zwei-Ebenen-Design

Drei-Ebenen-Design

Powerbetrachtungen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie das Theorem zum Testgütevergleich bei gleicher Effektstärke in einem Drei-Ebenen-Design. Warum ist die Testgüte bei Treatmentvariation auf der niedrigsten betrachteten Ebene am größten?

Anhang

Theorem (Ein-Ebenen-Design als hierarchisches balanciertes orthogonales LMM)

Das Ein-Ebenen-Parallelgruppendesign mit $e_1 = 48$ unabhängigen Proband:innen und

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_{48}) \quad (79)$$

ist ein hierarchisches balanciertes orthogonales LMM im Sinne von [Definition 1](#).

Bemerkung

- Die Treatmentzuweisung betrifft hier nur die Fixed-Effects-Designmatrix X
- Die orthogonale Blockstruktur betrifft die marginale Datenkovarianz.

Beweis

Setze formal $e_2 := 1$ und $u_1 := 48$. Dann gilt

$$e_1 = e_2 u_1 = 1 \cdot 48 = 48. \quad (80)$$

Alle Beobachtungen sind also in einem übergeordneten Designkontext verschachtelt. Mit

$$P_{48} := \frac{1}{48} 1_{48} 1_{48}^T, \quad R_{48} := I_{48} - P_{48} \quad (81)$$

definieren wir

$$Q_1 := R_{48}, \quad Q_2 := P_{48}. \quad (82)$$

Die Matrizen Q_1 und Q_2 sind symmetrisch, idempotent und paarweise orthogonal, und es gilt

$$Q_1 + Q_2 = R_{48} + P_{48} = I_{48}. \quad (83)$$

Weiterhin gilt mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \sigma_\varepsilon^2 > 0$

$$\mathbb{C}(y) = \sigma_\varepsilon^2 I_{48} = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2. \quad (84)$$

Damit besitzt das Design die geforderte orthogonale Blockstruktur. $\square$

Theorem (Zwei-Ebenen-Design als hierarchisches balanciertes orthogonales LMM)

Das Zwei-Ebenen-Design mit $e_1 = 48$ Messungen, $e_2 = 24$ Proband:innen, $u_1 = 2$ Messungen pro Proband:in und

$$y = X\beta + Zb + \varepsilon, \quad b \sim N(0, \sigma_p^2 I_{24}), \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_{48}) \quad (85)$$

ist für Treatmentvariation auf Messungs- und Proband:innenebene ein hierarchisches balanciertes orthogonales LMM.

Bemerkung

- Die beiden Treatmentvariationen unterscheiden sich nur in X
- Die marginale Kovarianzmatrix ist in beiden Fällen dieselbe.

Beweis

Die Messungen sind eindeutig in Proband:innen verschachtelt. Mit $e_3 := 1$, $u_1 := 2$ und $u_2 := 24$ gilt

$$e_1 = e_2 u_1 = 24 \cdot 2 = 48, \quad e_2 = e_3 u_2 = 1 \cdot 24 = 24. \quad (86)$$

Für $P_m := m^{-1} 1_m 1_m^T$ und $R_m := I_m - P_m$ sei

$$Q_1 := I_{24} \otimes R_2, \quad Q_2 := R_{24} \otimes P_2, \quad Q_3 := P_{24} \otimes P_2. \quad (87)$$

Da P_m und R_m symmetrische, idempotente und orthogonale Projektoren sind, sind auch Q_1, Q_2, Q_3 symmetrisch, idempotent und paarweise orthogonal. Außerdem gilt

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = I_{24} \otimes R_2 + (R_{24} + P_{24}) \otimes P_2 = I_{48}. \quad (88)$$

Beweis (fortgeführt)

Mit $Z = I_{24} \otimes 1_2$ ergibt sich die marginale Datenkovarianz

$$\begin{aligned} V_\theta &= Z\sigma_p^2 I_{24} Z^T + \sigma_\varepsilon^2 I_{48} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 I_{48} + \sigma_p^2 (I_{24} \otimes 1_2 1_2^T) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 I_{48} + 2\sigma_p^2 (I_{24} \otimes P_2). \end{aligned} \tag{89}$$

Da

$$I_{48} = Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad I_{24} \otimes P_2 = Q_2 + Q_3, \tag{90}$$

folgt

$$V_\theta = \sigma_\varepsilon^2 Q_1 + (\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2) Q_2 + (\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2) Q_3. \tag{91}$$

Mit

$$\lambda_1 := \sigma_\varepsilon^2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 := \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2 \tag{92}$$

liegt also eine orthogonale Blockstruktur vor. $\square$

Theorem (Drei-Ebenen-Design als hierarchisches balanciertes orthogonales LMM)

Das Drei-Ebenen-Design mit $e_1 = 48$ Messungen, $e_2 = 24$ Proband:innen, $e_3 = 6$ Interventionsleitenden, $u_1 = 2$ und $u_2 = 4$ sowie

$$y = X\beta + Zb + \varepsilon \quad (93)$$

mit Random-Interzept-Termen auf Interventionsleitenden- und Proband:innenebene ist für Treatmentvariation auf Messungs-, Proband:innen- und Interventionsleitendenebene ein hierarchisches balanciertes orthogonales LMM.

Bemerkung

- Auch hier unterscheiden die Treatmentvariationen nur die zweite Spalte von X
- Die folgende Kovarianzzerlegung ist davon unabhängig.

Beweis

Die Verschachtelung und Balance sind gegeben durch

$$e_1 = e_2 u_1 = 24 \cdot 2 = 48, \quad e_2 = e_3 u_2 = 6 \cdot 4 = 24, \quad e_3 = e_4 u_3 = 1 \cdot 6 = 6. \quad (94)$$

Mit $P_m := m^{-1} 1_m 1_m^T$ und $R_m := I_m - P_m$ definieren wir

$$\begin{aligned} Q_1 &:= I_6 \otimes I_4 \otimes R_2, \\ Q_2 &:= I_6 \otimes R_4 \otimes P_2, \\ Q_3 &:= R_6 \otimes P_4 \otimes P_2, \\ Q_4 &:= P_6 \otimes P_4 \otimes P_2. \end{aligned} \quad (95)$$

Aus den Projekteigenschaften von P_m und R_m folgt, dass $Q_1, \dots, Q_4$ symmetrisch, idempotent und paarweise orthogonal sind. Zudem gilt

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = I_{48}. \quad (96)$$

Beweis (fortgeführt)

Die marginale Datenkovarianz ist

$$V_{\theta} = \sigma_{\varepsilon}^2 I_{48} + \sigma_p^2 (I_6 \otimes I_4 \otimes 1_2 1_2^T) + \sigma_l^2 (I_6 \otimes 1_4 1_4^T \otimes 1_2 1_2^T). \quad (97)$$

Mit

$$1_2 1_2^T = 2P_2, \quad 1_4 1_4^T = 4P_4 \quad (98)$$

und der Definition der Q_r gilt

$$\begin{aligned} I_{48} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4, \\ I_6 \otimes I_4 \otimes 1_2 1_2^T &= 2(Q_2 + Q_3 + Q_4), \\ I_6 \otimes 1_4 1_4^T \otimes 1_2 1_2^T &= 8(Q_3 + Q_4). \end{aligned} \quad (99)$$

Beweis (fortgeführt)

Damit folgt

$$\begin{aligned} V_\theta = & \sigma_\varepsilon^2 Q_1 + (\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2) Q_2 \\ & + (\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2 + 8\sigma_l^2) Q_3 + (\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2 + 8\sigma_l^2) Q_4. \end{aligned} \tag{100}$$

Mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= \sigma_\varepsilon^2, \\ \lambda_2 &:= \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2, \\ \lambda_3 = \lambda_4 &:= \sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2 + 8\sigma_l^2 \end{aligned} \tag{101}$$

ist die marginale Kovarianz also als Summe orthogonaler Blockprojektoren mit positiven Koeffizienten darstellbar. Damit ist das Drei-Ebenen-Design ein hierarchisches balanciertes orthogonales LMM. $\square$

Theorem (Fixed-Effects-Schätzer im Zwei-Ebenen-Design)

Im balancierten Zwei-Ebenen-Design gelten für den Fixed-Effects-Parameterschätzer folgende Darstellungen.

1. Bei Treatmentvariation auf Messungsebene gilt

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} y_{i1} \\ \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} (y_{i2} - y_{i1}) \end{pmatrix}. \quad (102)$$

2. Bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene gilt mit

$$\bar{y}_i := \frac{1}{2}(y_{i1} + y_{i2}), \quad \bar{y}_1 := \frac{2}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i, \quad \bar{y}_2 := \frac{2}{e_2} \sum_{i=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_i \quad (103)$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Bemerkungen

- Bei Treatmentvariation auf Messungsebene ist $\hat{\beta}_1$ der Mittelwert der Messwertdifferenzen
- Bei Treatmentvariation auf Proband:innenebene ist $\hat{\beta}_1$ die Differenz der Proband:innenmittelwerte

Beweis

Mit

$$X_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_i := (y_{i1}, y_{i2})^T, \quad S_i := \sigma_\varepsilon^2 I_2 + \sigma_p^2 J_2 \quad (105)$$

gelten $X = 1_{e_2} \otimes X_i$ und $V_\theta = I_{e_2} \otimes S_i$. Der GLS-Schätzer erfüllt damit

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X^T V_\theta^{-1} X)^{-1} X^T V_\theta^{-1} y \\ &= ((1_{e_2}^T \otimes X_i^T)(I_{e_2} \otimes S_i^{-1})(1_{e_2} \otimes X_i))^{-1} (1_{e_2}^T \otimes X_i^T)(I_{e_2} \otimes S_i^{-1})y \\ &= (e_2 X_i^T S_i^{-1} X_i)^{-1} \sum_{i=1}^{e_2} X_i^T S_i^{-1} y_i \\ &= (X_i^T S_i^{-1} X_i)^{-1} X_i^T S_i^{-1} \left(\frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} y_i \right) \\ &= X_i^{-1} \left(\frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} y_i \right). \end{aligned} \quad (106)$$

Beweis (fortgeführt)

Also folgt

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} y_{i1} \\ \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} y_{i2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} y_{i1} \\ \frac{1}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2} (y_{i2} - y_{i1}) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{107}$$

Schließlich zeigen wir, dass

$$(X_i^T S_i^{-1} X_i)^{-1} X_i^T S_i^{-1} = X_i^{-1}.\tag{108}$$

Weil X_i und S_i invertierbar sind, gilt zunächst

$$(X_i^T S_i^{-1} X_i)^{-1} = X_i^{-1} S_i (X_i^T)^{-1}.\tag{109}$$

Damit folgt

$$(X_i^T S_i^{-1} X_i)^{-1} X_i^T S_i^{-1} = X_i^{-1} S_i (X_i^T)^{-1} X_i^T S_i^{-1} = X_i^{-1}.\tag{110}$$

Beweis (fortgeführt)

Für $i = 1, \dots, e_2/2$ sei $g_i := (1, 0)^T$, für $i = e_2/2 + 1, \dots, e_2$ sei $g_i := (1, 1)^T$. Weiterhin seien

$$X_i := 1_2 g_i^T, \quad y_i := (y_{i1}, y_{i2})^T, \quad S_i := \sigma_\varepsilon^2 I_2 + \sigma_p^2 1_{22}. \quad (111)$$

$$\begin{aligned} S_i 1_2 &= (\sigma_\varepsilon^2 I_2 + \sigma_p^2 1_{22}) 1_2 \\ &= (\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2) 1_2 \\ \Rightarrow S_i^{-1} 1_2 &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2} 1_2. \end{aligned} \quad (112)$$

Also gilt mit $a := 1_2^T S_i^{-1} 1_2$:

$$\begin{aligned} a &= 1_2^T S_i^{-1} 1_2 = \frac{2}{\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2}, \\ 1_2^T S_i^{-1} y_i &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2} 1_2^T y_i \\ &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2 + 2\sigma_p^2} (y_{i1} + y_{i2}) \\ &= a \bar{y}_i. \end{aligned} \quad (113)$$

Beweis (fortgeführt)

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \left(\sum_{i=1}^{e_2} X_i^T S_i^{-1} X_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^{e_2} X_i^T S_i^{-1} y_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{e_2} g_i 1_2^T S_i^{-1} 1_2 g_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^{e_2} g_i 1_2^T S_i^{-1} y_i \\ &= \left(a \sum_{i=1}^{e_2} g_i g_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^{e_2} g_i a \bar{y}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{e_2} g_i g_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^{e_2} g_i \bar{y}_i.\end{aligned}\tag{114}$$

Beweis (fortgeführt)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{e_2} g_i g_i^T &= \sum_{i=1}^{e_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=e_2/2+1}^{e_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_2 & e_2/2 \\ e_2/2 & e_2/2 \end{pmatrix} = \frac{e_2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \left(\sum_{i=1}^{e_2} g_i g_i^T \right)^{-1} &= \frac{2}{e_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{115}$$

Beweis (fortgeführt)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{e_2} g_i \bar{y}_i &= \sum_{i=1}^{e_2/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{y}_i + \sum_{i=e_2/2+1}^{e_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{y}_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i \\ \sum_{i=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_i \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{116}$$

und damit

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{2}{e_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i \\ \sum_{i=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_i \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{e_2} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i \\ -\sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i + \sum_{i=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{117}$$

Damit ist insbesondere $\hat{\beta}_1 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$.

□

Theorem (Unabhängigkeit der Gruppenmittelwerte)

Im balancierten Zwei-Ebenen-Design mit Treatmentvariation auf Proband:innenebene seien

$$\bar{y}_i := \frac{1}{2}(y_{i1} + y_{i2}), \quad \bar{y}_1 := \frac{2}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i, \quad \bar{y}_2 := \frac{2}{e_2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_j. \quad (118)$$

Dann gilt

$$\mathbb{C}(\bar{y}_2, \bar{y}_1) = 0. \quad (119)$$

Bemerkungen

- $\bar{y}_1$ bezeichnet den Mittelwert der proband:innenspezifischen Mittelwerte in der Kontrollgruppe
- $\bar{y}_2$ bezeichnet den Mittelwert der proband:innenspezifischen Mittelwerte in der Treatmentgruppe.

Beweis

Mit den Rechenregeln für Kovarianzen in [PDWP 3.7 Kovarianzen](#) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\bar{y}_2, \bar{y}_1) &= \mathbb{C}\left(\frac{2}{e_2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \bar{y}_j, \frac{2}{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \bar{y}_i\right) \\ &= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \mathbb{C}(\bar{y}_j, \bar{y}_i) \\ &= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \mathbb{C}\left(\frac{1}{2}(y_{j1} + y_{j2}), \frac{1}{2}(y_{i1} + y_{i2})\right) \\ &= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \mathbb{C}\left(\frac{1}{2}((\beta_0 + \beta_1 + b_j + \varepsilon_{j1}) + (\beta_0 + \beta_1 + b_j + \varepsilon_{j2})), \frac{1}{2}((\beta_0 + b_i + \varepsilon_{i1}) + (\beta_0 + b_i + \varepsilon_{i2}))\right) \\ &= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \mathbb{C}\left(\beta_0 + \beta_1 + b_j + \frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), \beta_0 + b_i + \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \\ &= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \mathbb{C}\left(b_j + \frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), b_i + \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right). \end{aligned} \tag{120}$$

Anhang

Beweis (fortgeführt)

Mit den Rechenregeln für Kovarianzen folgt weiter

$$\begin{aligned}C(\bar{y}_2, \bar{y}_1) &= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} C\left(b_j + \frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), b_i + \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \left(C(b_j, b_i) + C\left(b_j, \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) + C\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), b_i\right) + C\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \left(0 + C\left(b_j, \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) + C\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), b_i\right) + C\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \left(0 + \frac{1}{2}C(b_j, \varepsilon_{i1}) + \frac{1}{2}C(b_j, \varepsilon_{i2}) + \frac{1}{2}C(\varepsilon_{j1}, b_i) + \frac{1}{2}C(\varepsilon_{j2}, b_i) + C\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \left(0 + 0 + 0 + 0 + 0 + C\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{j1} + \varepsilon_{j2}), \frac{1}{2}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})\right) \right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \left(0 + \frac{1}{4}C(\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{i1}) + \frac{1}{4}C(\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{i2}) + \frac{1}{4}C(\varepsilon_{j2}, \varepsilon_{i1}) + \frac{1}{4}C(\varepsilon_{j2}, \varepsilon_{i2}) \right) \\&= \frac{4}{e_2^2} \sum_{j=e_2/2+1}^{e_2} \sum_{i=1}^{e_2/2} \left(0 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}0 \right) \\&= 0.\end{aligned}$$

(121)

□

Theorem (Kroneckerproduktrechenregeln)

Seien A, B, C, D Matrizen passender Dimension. Dann gelten

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T, \quad (122)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD). \quad (123)$$

Sind A und B invertierbar, so gilt außerdem

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \quad (124)$$

Für Blockvektoren der Form

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad y_i \in \mathbb{R}^q,$$

gilt weiterhin

$$(1_m^T \otimes A)y = \sum_{i=1}^m Ay_i. \quad (125)$$

Insbesondere ist

$$1_m^T I_m 1_m = 1_m^T 1_m = m. \quad (126)$$

Referenzen I

- Cox, Kyle, Ben Kelecyc, and Jada Deiderich. 2025. "Partially Nested Designs in Social Work Research: Principles and Practices." *Research on Social Work Practice* 35 (3): 332–48. <https://doi.org/10.1177/10497315231208700>.
- Esserman, Denise, Yingqi Zhao, Yiyun Tang, and Jianwen Cai. 2013. "Sample Size Estimation in Educational Intervention Trials with Subgroup Heterogeneity in Only One Arm." *Statistics in Medicine* 32 (12): 2140–54. <https://doi.org/10.1002/sim.5678>.
- Heo, Moonseong, Xiaonan Xue, and Mimi Y. Kim. 2013. "Sample Size Requirements to Detect an Intervention by Time Interaction in Longitudinal Cluster Randomized Clinical Trials with Random Slopes." *Computational Statistics & Data Analysis* 60: 169–78. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2012.11.016>.
- Houtman, A. M., and T. P. Speed. 1983. "Balance in Designed Experiments with Orthogonal Block Structure." *The Annals of Statistics* 11 (4). <https://doi.org/10.1214/aos/1176346322>.
- Moerbeek, Mirjam. 2024. "Optimal Design of Cluster Randomized Crossover Trials with a Continuous Outcome: Optimal Number of Time Periods and Treatment Switches Under a Fixed Number of Clusters or Fixed Budget." *Behavior Research Methods* 56 (8): 8820–30. <https://doi.org/10.3758/s13428-024-02505-1>.
- Murray, David M., Sherri P. Varnell, and Jonathan L. Blitstein. 2004. "Design and Analysis of Group-Randomized Trials: A Review of Recent Methodological Developments." *American Journal of Public Health* 94 (3): 423–32. <https://doi.org/10.2105/AJPH.94.3.423>.
- Nelder, John Ashworth. 1965a. "The Analysis of Randomized Experiments with Orthogonal Block Structure. I. Block Structure and the Null Analysis of Variance." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 283 (1393): 147–62. <https://doi.org/10.1098/rspa.1965.0012>.
- Nelder, John Ashworth. 1965b. "The Analysis of Randomized Experiments with Orthogonal Block Structure. II. Treatment Structure and the General Analysis of Variance." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 283 (1393): 163–78. <https://doi.org/10.1098/rspa.1965.0013>.

- Preisser, John S., M. L. Young, D. J. Zaccaro, and Mark Wolfson. 2010. "Sample Size Considerations for GEE Analyses of Three-Level Cluster Randomized Trials." *Biometrics* 66 (4): 1230–37. <https://doi.org/10.1111/j.1541-0420.2009.01374.x>.
- Teerenstra, Steven, Mirjam Moerbeek, Theo van Achterberg, Ben J. Pelzer, and George F. Borm. 2008. "Sample Size Calculations for 3-Level Cluster Randomized Trials." *Clinical Trials* 5 (5): 486–95. <https://doi.org/10.1177/1740774508096476>.
- Wang, Xueqi, Elizabeth L. Turner, John S. Preisser, and Fan Li. 2022. "Power Considerations for Generalized Estimating Equations Analyses of Four-Level Cluster Randomized Trials." *Biometrical Journal* 64 (4): 663–80. <https://doi.org/10.1002/bimj.202100081>.