



Interventionsforschung

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

MSc Umweltpsychologie / Mensch-Technik-Interaktion

SoSe 2026

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(3) Pretest-Posttest-Designs

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

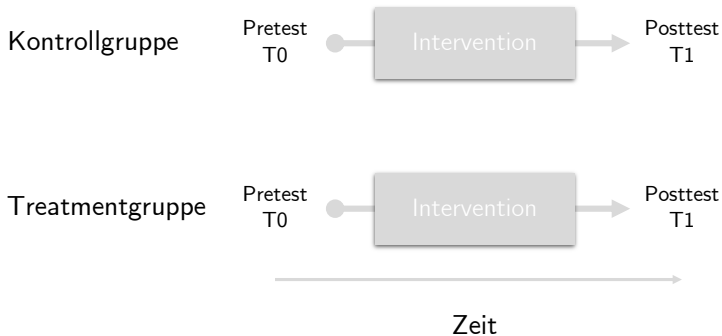
Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

Parallelgruppen-Pretest-Posttest-Designs



Anwendungsbeispiel Klinische Psychologie

Hat Kognitive Verhaltenstherapie bei Patient:innen mit Depression einen Effekt?

Randomisierte Zuweisung von $n = 16$ Patient:innen zu zwei Gruppen

- Treatmentgruppe: Kognitive Verhaltenstherapie (12 Sitzungen)
- Kontrollgruppe: Warteliste

⇒ Messung des BDI-II vor Therapiebeginn (Pre) und nach Therapieende (Post)

Anwendungsbeispiel Umweltpsychologie

Hat ein Energiespar-Feedback bei Studierenden einen Effekt auf den Stromverbrauch?

Randomisierte Zuweisung von $n = 16$ Studierendenwohnheim-Zimmern zu zwei Gruppen

- Treatmentgruppe: Wöchentliches Feedback zum eigenen Stromverbrauch plus Energiespartipps
- Kontrollgruppe: Kein Feedback

⇒ Messung des Stromverbrauchs vor Beginn der Intervention (Pre) und nach vier Wochen (Post)

Parallelgruppen-Pretest-Posttest-Design

Charakteristika

- Randomisierte Aufteilung von Proband:innen auf eine Kontroll- und eine Treatmentgruppe
- Typischerweise univariate primäre Zielvariable
- Messung der Zielvariablen *vor* (Pretest, T0, Baseline) und *nach* (Posttest, T1) Intervention

Nomenklatur im Kontext faktorieller Designs

- Zweifaktorielles Design mit Messwiederholung
- Between-Group Faktor *Gruppe* mit den Leveln *Kontrolle* und *Treatment*
- Within-Group-Faktor *Zeitpunkt* mit den Leveln *Pretest* und *Posttest*

Motivation

- Parallelgruppen-Pretest-Postdesigns als die einfachsten RCT-Longitudinaldesigns
- RCT-Longitudinaldesigns oft primär an T0 und T1 interessiert

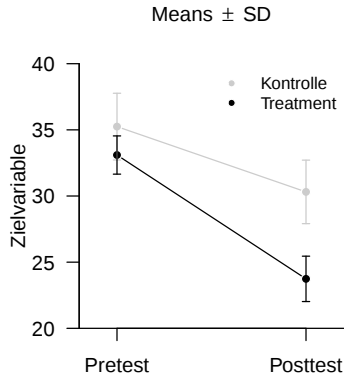
Anwendungsbeispiel

- $n = 16$ Proband:innen randomisiert auf Kontrollgruppe ($n_1 = 8$) und Treatmentgruppe ($n_2 = 8$) aufgeteilt
- Proband:innen $i = 1, \dots, 8$ in Kontrollgruppe, Proband:innen $i = 9, \dots, 16$ in Treatmentgruppe
- Messung der primären Zielvariablen Pre und Post Intervention in beiden Gruppen
- y_{i0} und y_{i1} für Pre- bzw. Postwerte von Proband:in $i = 1, \dots, n$

P	Gruppe	Pre	Post
1	Kontrolle	37	32
2	Kontrolle	31	32
3	Kontrolle	37	33
4	Kontrolle	38	31
5	Kontrolle	37	29
6	Kontrolle	32	27
7	Kontrolle	34	28
8	Kontrolle	35	29
9	Treatment	34	24
10	Treatment	31	23
11	Treatment	32	26
12	Treatment	32	21
13	Treatment	34	22
14	Treatment	34	25
15	Treatment	34	24
16	Treatment	35	25

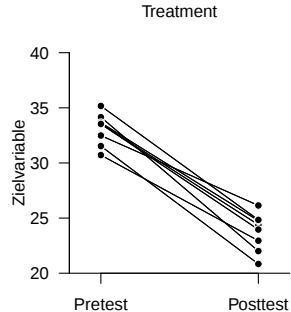
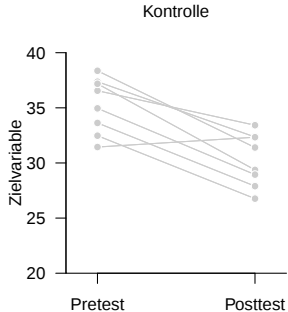
Anwendungsbeispiel

- $n = 16$ Proband:innen randomisiert auf Kontrollgruppe ($n_1 = 8$) und Treatmentgruppe ($n_2 = 8$) aufgeteilt
- Proband:innen $i = 1, \dots, 8$ in Kontrollgruppe, Proband:innen $i = 9, \dots, 16$ in Treatmentgruppe
- Messung der primären Zielvariablen Pre und Post Intervention in beiden Gruppen
- y_{i0} und y_{i1} für Pre- bzw. Postwerte von Proband:in $i = 1, \dots, n$



Anwendungsbeispiel

- $n = 16$ Proband:innen randomisiert auf Kontrollgruppe ($n_1 = 8$) und Treatmentgruppe ($n_2 = 8$) aufgeteilt
- Proband:innen $i = 1, \dots, 8$ in Kontrollgruppe, Proband:innen $i = 9, \dots, 16$ in Treatmentgruppe
- Messung der primären Zielvariablen Pre und Post Intervention in beiden Gruppen
- y_{i0} und y_{i1} für Pre- bzw. Postwerte von Proband:in $i = 1, \dots, n$



Deskriptivstatistik

Gruppe	Pretest $M(SD)$	Posttest $M(SD)$
Treatment	33.10 (1.44)	23.74 (1.71)
Kontrolle	35.25 (2.52)	30.31 (2.40)

Anwendungsbeispiel Klinische Psychologie

Die depressive Symptomatik nahm in der Gruppe mit Kognitiver Verhaltenstherapie deskriptiv stärker ab (Pretest: $M = 33.10$, $SD = 1.44$; Posttest: $M = 23.74$, $SD = 1.71$) als in der Wartelistenkontrolle (Pretest: $M = 35.25$, $SD = 2.52$; Posttest: $M = 30.31$, $SD = 2.40$). Bereits im Pretest lagen die Werte in der KVT-Gruppe dabei niedriger als in der Kontrollgruppe.

Anwendungsbeispiel Umweltpsychologie

Der Stromverbrauch nahm in der Gruppe mit wöchentlichem Energiespar-Feedback deskriptiv stärker ab (Pretest: $M = 33.10$, $SD = 1.44$; Posttest: $M = 23.74$, $SD = 1.71$) als in der Kontrollgruppe ohne Feedback (Pretest: $M = 35.25$, $SD = 2.52$; Posttest: $M = 30.31$, $SD = 2.40$). Bereits im Pretest lag der Stromverbrauch in der Feedbackgruppe dabei niedriger als in der Kontrollgruppe.

Datenanalysen für Parallelgruppen-Pretest-Posttest-Designs

Posttest-Varianzanalyse

- Analyse allein der Posttest-Daten

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

- Korrektur der Posttest-Gruppenunterschiede durch Pretest-Messungen

Change-Score-Varianzanalyse

- Analyse der Gruppenunterschiede basierend auf Posttest-Pretest-Differenzen

Linear-Mixed-Model-Analyse

- Einfachster Fall von Longitudinal-Datenanalyse mit Linear-Mixed-Models

Literaturhinweise

Vergleichsarbeiten zu den hier betrachteten Analyseverfahren

- Crager (1987), Frison and Pocock (1992), Fitzmaurice (2001), Oakes and Feldman (2001)
- Yang and Tsiatis (2001), Senn (2006), Winkens et al. (2007), O Connell et al. (2017)
- Tango (2017) für einen exzellenten Überblick insbesondere bezüglich Linear-Mixed-Models

Arbeiten mit einem Fokus auf bivariater Modellierung des Pretest-Posttest-Szenarios

- Chen (2006), Funatogawa and Funatogawa (2011)
- Funatogawa et al. (2011), Funatogawa and Funatogawa (2020)

Zur Repeated-Measures ANOVA (Split-Plot ANOVA) Frage

- Generell für Parallelgruppen-Pretest-Posttest-Designs nicht empfohlen
- Winer (1971) gibt einen ausführlichen Überblick und zu Repeated-Measures ANOVA
- Huck and McLean (1975), Brogan and Kutner (1980), Jennings (1988), McCulloch (2005)

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

Posttest-Varianzanalyse

- Nichtberücksichtigung der Pretest-Daten
- Einfaktorielle Varianzanalyse/Zweistichproben-T-Test-Analyse im Rahmen des ALM
- Posttest-Daten können Mittelwerte über mehrere Posttestmessungen sein
- Generell nicht empfohlen, Betrachtung hier nur zu Vergleichszwecken
- Vgl. Frison and Pocock (1992), O Connell et al. (2017), Tango (2017) Kapitel 2.1

Gründe für die datenanalytische Inklusion von Pretest-Daten (vgl. Huck and McLean (1975))

- Anpassen der Posttest-Daten für im Pretest bestehende Gruppenunterschiede
- Sensitivitätserhöhung für Gruppeneffekt durch Reduktion der Within-Group Variabilität

Strukturelle Modellform

Für $i = 1, \dots, n$ Proband:innen seien y_{i1} die Posttest-Daten.

Dann hat das Posttest-Varianzanalysemodell die strukturelle Modellform

$$y_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

mit

- $x_i := 0$ für Proband:in i in Kontrollgruppe
- $x_i := 1$ für Proband:in i in Treatmentgruppe
- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ u.i.v.

Parameterbedeutungen

β_0	Erwartungswert der Kontrollgruppen-Posttest-Daten
β_1	Erwartungswertunterschied zwischen Kontrollgruppen- und Treatmentgruppen-Posttest-Daten
σ^2	Posttest-Datenvariabilität

Designmatrixform für das Anwendungsbeispiel

$$y = X\beta + \varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{41} \\ y_{51} \\ y_{61} \\ y_{71} \\ y_{81} \\ y_{91} \\ y_{101} \\ y_{111} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{141} \\ y_{151} \\ y_{161} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \end{pmatrix} \quad (2)$$

mit

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \varepsilon \sim N(0_{16}, \sigma^2 I_{16}) \quad (3)$$

Modellevaluation für das Anwendungsbeispiel

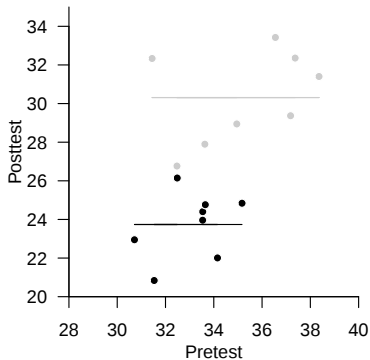
```
D      = read.csv("3-Daten/pre-post.csv", row.names = 1) # Dateneinlesen
M      = lm(Post ~ Gruppe, data = D)                    # Modellformulierung und -schätzung
beta_hat = summary(M)$coefficients                     # Betaparameterschätzer
sigsqr_hat = summary(M)$sigma^2                       # Varianzparameterschätzer
ki      = confint(M, level = 0.95)                     # Betaparameterkonfidenzintervalle
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	KI.u	KI.o
(Intercept)	30.311	0.737	41.111	0.000	28.730	31.893
GruppeTreatment	-6.573	1.043	-6.304	0.000	-8.810	-4.337
sigma^2	4.349					

⇒ Geschätzter Erwartungswertunterschied zwischen Treatment- und Kontrollgruppe: -6.57 (± 1.04)

Posttest-Varianzanalyse

Visualisierung für das Anwendungsbeispiel



● Kontrollgruppe ● Treatmentgruppe, —, — $\hat{y} = X\hat{\beta}$

Dokumentation

Anwendungsbeispiel Klinische Psychologie

Eine Posttest-Varianzanalyse zeigte nach Abschluss der Intervention eine geringere depressive Symptomatik in der KVT-Gruppe als in der Wartelistenkontrollgruppe, $b = -6.57$, $SE = 1.04$, 95%-KI $[-8.81, -4.34]$, $t(14) = -6.30$, $p < .001$. Die mittlere Posttest-Symptomatik lag damit in der KVT-Gruppe um geschätzt 6.57 Skalenpunkte niedriger als in der Kontrollgruppe.

Anwendungsbeispiel Umweltpsychologie

Eine Posttest-Varianzanalyse ergab nach Abschluss der Intervention einen geringeren Stromverbrauch in der Feedbackgruppe als in der Kontrollgruppe ohne Feedback, $b = -6.57$, $SE = 1.04$, 95%-KI $[-8.81, -4.34]$, $t(14) = -6.30$, $p < .001$. Der mittlere Posttest-Stromverbrauch lag in der Feedbackgruppe somit um geschätzt 6.57 Einheiten niedriger als in der Kontrollgruppe.

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

- Kovarianzanalyse der Posttest-Daten mit Pretest-Daten als Kovariate im Rahmen des ALM
- Verringerung residueller Variabilität im Vergleich zur Posttest-Varianzanalyse $\Rightarrow$ Sensitivität $\uparrow$
- Korrektur für Pretest-Gruppenunterschiede im Sinne adjustierter Posttest-Gruppenmittelwerte

vgl. Crager (1987), Frison and Pocock (1992), Chen (2006)

Strukturelle Modellform

Für $i = 1, \dots, n$ Proband:innen seien y_{i0} und y_{i1} die Pretest- bzw. Posttest-Daten.

Dann hat das Posttest-Kovarianzanalysemodell mit Pretest-Kovariate die strukturelle Modellform

$$y_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 y_{i0} + \varepsilon_i \quad (4)$$

mit

- $x_i := 0$ für Proband:in i in Kontrollgruppe
- $x_i := 1$ für Proband:in i in Treatmentgruppe
- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ u.i.v.

Parameterbedeutungen

β_0	Erwartungswert der Kontrollgruppe
β_1	Erwartungswertunterschied zwischen Kontrollgruppe und Treatmentgruppe
β_2	Steigungsparameter der Pretest-Kovariate
σ^2	Variabilität der Posttest-Daten

Designmatrixform für das Anwendungsbeispiel

$$y = X\beta + \varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{41} \\ y_{51} \\ y_{61} \\ y_{71} \\ y_{81} \\ y_{91} \\ y_{101} \\ y_{111} \\ y_{121} \\ y_{131} \\ y_{141} \\ y_{151} \\ y_{161} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_{10} \\ 1 & 0 & y_{20} \\ 1 & 0 & y_{30} \\ 1 & 0 & y_{40} \\ 1 & 0 & y_{50} \\ 1 & 0 & y_{60} \\ 1 & 0 & y_{70} \\ 1 & 0 & y_{80} \\ 1 & 1 & y_{90} \\ 1 & 1 & y_{100} \\ 1 & 1 & y_{110} \\ 1 & 1 & y_{120} \\ 1 & 1 & y_{130} \\ 1 & 1 & y_{140} \\ 1 & 1 & y_{150} \\ 1 & 1 & y_{160} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \end{pmatrix} \quad (5)$$

mit

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \varepsilon \sim N(0_{16}, \sigma^2 I_{16}) \quad (6)$$

Modellevaluation für das Anwendungsbeispiel

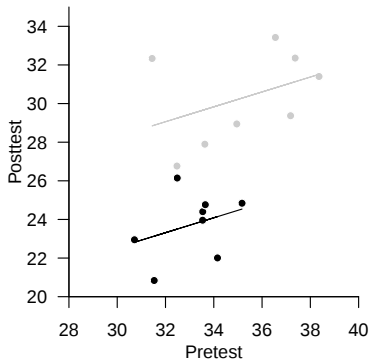
```
D      = read.csv("3-Daten/pre-post.csv", row.names = 1) # Dateneinlesen
M      = lm(Post ~ Gruppe + Pre, data = D)               # Modellformulierung und -schätzung
beta_hat = summary(M)$coefficients                      # Betaparameterschätzer
sigsqr_hat = summary(M)$sigma^2                         # Varianzparameterschätzer
ki      = confint(M, level = 0.95)                     # Betaparameterkonfidenzintervalle
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	KI.u	KI.o
(Intercept)	16.720	9.205	1.816	0.092	-3.166	36.606
GruppeTreatment	-5.745	1.147	-5.011	0.000	-8.222	-3.268
Pre	0.386	0.260	1.481	0.162	-0.177	0.948
sigma^2	4.008					

⇒ Geschätzter Erwartungswertunterschied zwischen Treatment- und Kontrollgruppe: -5.75 ($\pm$ 1.15)

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Visualisierung für das Anwendungsbeispiel



● Kontrollgruppe, ● Treatmentgruppe, —, — $\hat{y} = X\hat{\beta}$,

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

Modellschätzer-basierte Prädiktion der Posttest-Gruppenmittelwerte für marginalen Pretest-Mittelwert

- Marginaler Pretest-Mittelwert = Mittelwert der Pretest-Daten über beide Gruppen

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i0} \quad (7)$$

- Modellschätzer-basierte Prädiktion der Posttest-Gruppenmittelwerte (K: Kontrolle, T: Treatment)

$$\begin{pmatrix} \hat{\bar{y}}_1^C \\ \hat{\bar{y}}_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{y}_0 \\ 1 & 1 & \bar{y}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

- Bedingte Antwort auf die Frage nach den Gruppenmittelwerten bei angenommenen identischen Pretest-Daten
- “Wenn die Pretest-Daten beider Gruppen identisch wären, was wären dann die Posttest-Gruppenmittelwerte?”
- $\Rightarrow$ Marginaler Mittelwert der Pretest-Daten als Schätzer für interventionsunabhängigen Pretest-Erwartungswert
- Auch als Expected / Conditional / Estimated / Population Marginal Means bezeichnet

vgl. Goodnight and Harvey (1978), Searle et al. (1980), Lenth (2016)

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

```
D      = read.csv("3-Daten/pre-post.csv", row.names = 1) # Dateneinlesen
M      = lm(Post ~ Gruppe + Pre, data = D)              # Modellformulierung und -schätzung
beta_hat = M$coefficients                               # Betaparameterschätzer
y_0_bar = mean(D$Pre)                                   # Marginaler Mittelwert Pretest-Daten
X_p     = matrix(c(1,1,0,1,y_0_bar,y_0_bar), nrow = 2) # Prädiktionsdesignmatrix
y_1_bar_adj = X_p %*% beta_hat                          # Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte
```

Adjusted marginal means

Kontrolle : 29.9

Treatment : 24.2

```
library(emmeans) # R Paket für adjustierte Gruppenmittelwerte
AMM              = emmeans(M, "Gruppe") # Adjustierte Gruppenmittelwerte
```

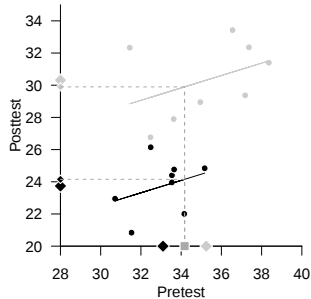
Gruppe	emmean	SE	df	lower.CL	upper.CL
Kontrolle	29.9	0.761	13	28.3	31.5
Treatment	24.2	0.761	13	22.5	25.8

Confidence level used: 0.95

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

Visualisierung für das Anwendungsbeispiel



● Kontrollgruppe, ● Treatmentgruppe, —, — $\hat{y} = X\hat{\beta}$,

◇ Kontrollgruppenmittelwert, ◆ Treatmentgruppenmittelwert, ■ Marginaler Pretest-Mittelwert

◇ Adjustierter Posttest-Kontrollgruppenmittelwert, ◇ Adjustierter Posttest-Treatmentgruppenmittelwert

Dokumentation

Anwendungsbeispiel Klinische Psychologie

Eine Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Symptomatik als Kovariate zeigte nach Abschluss der Intervention eine geringere depressive Symptomatik in der KVT-Gruppe als in der Wartelistenkontrollgruppe, $b = -5.75$, $SE = 1.15$, 95%-KI $[-8.22, -3.27]$, $t(13) = -5.01$, $p < .001$. Bei einem gemeinsamen marginalen Pretestwert betrugen die adjustierten Posttest-Mittelwerte 29.9 in der Kontrollgruppe und 24.2 in der KVT-Gruppe. Die KVT-Gruppe wies somit auch nach Adjustierung für die Pretest-Symptomatik eine geschätzt 5.75 Skalenpunkte geringere depressive Symptomatik auf.

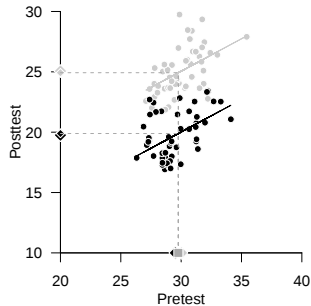
Anwendungsbeispiel Umweltpsychologie

Eine Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Stromverbrauch als Kovariate ergab nach Abschluss der Intervention einen geringeren Stromverbrauch in der Feedbackgruppe als in der Kontrollgruppe ohne Feedback, $b = -5.75$, $SE = 1.15$, 95%-KI $[-8.22, -3.27]$, $t(13) = -5.01$, $p < .001$. Bei einem gemeinsamen marginalen Pretestwert lagen die adjustierten Posttest-Mittelwerte bei 29.9 in der Kontrollgruppe und 24.2 in der Feedbackgruppe. Der Stromverbrauch war in der Feedbackgruppe somit auch nach Adjustierung für den Pretest-Stromverbrauch geschätzt 5.75 Einheiten geringer.

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

Geringe Pretest-Gruppenmittelwertsunterschiede $\Rightarrow$ Geringer Effekt der Posttest-Gruppenmittelwertadjustierung



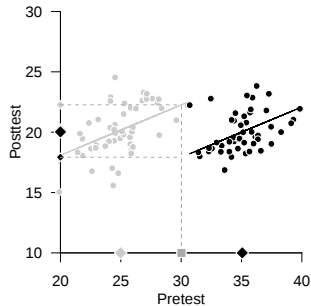
● Kontrollgruppe, ● Treatmentgruppe, —, — $\hat{y} = X\hat{\beta}$,

◆ Kontrollgruppenmittelwert, ◆ Treatmentgruppenmittelwert, ■ Marginaler Pretest-Mittelwert

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

Große Pretest-Gruppenmittelwertsunterschiede mit Verstärkung des Posttest-Gruppenmittelwertsunterschieds



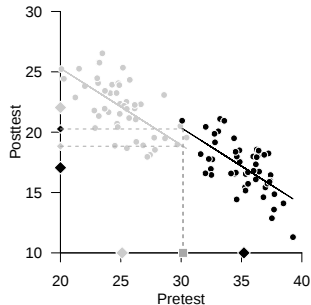
● Kontrollgruppe, ● Treatmentgruppe, —, — $\hat{y} = X\hat{\beta}$,

◆ Kontrollgruppenmittelwert, ◆ Treatmentgruppenmittelwert, ■ Marginaler Pretest-Mittelwert

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

Große Pretest-Gruppenmittelwertsunterschiede mit Verringerung des Posttest-Gruppenmittelwertsunterschieds



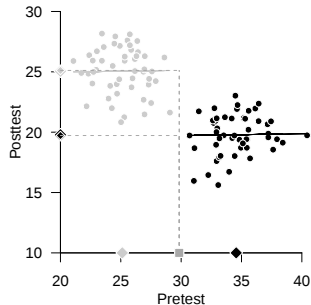
● Kontrollgruppe, ● Treatmentgruppe, —, — $\hat{y} = X\hat{\beta}$,

◆ Kontrollgruppenmittelwert, ◆ Treatmentgruppenmittelwert, ■ Marginaler Pretest-Mittelwert

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

Geringe Pretest-Posttest-Korrelation $\Rightarrow$ Geringer Effekt der Posttest-Gruppenmittelwertadjustierung



• Kontrollgruppe, • Treatmentgruppe, —, — $\hat{y} = X\hat{\beta}$,

◆ Pretest-Kontrollgruppenmittelwert, ◆ Pretest-Treatmentgruppenmittelwert, ■ Marginaler Pretest-Mittelwert

Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte

- Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte unterscheiden sich von tatsächlichen Posttest-Gruppenmittelwerten (nur) dann stark, wenn sich die Pretest-Daten der Zielvariablen zwischen den Gruppen stark unterscheiden und die Pretest-Posttest-Korrelation groß ist.
- Wenn sich die Pretest-Daten der Zielvariablen zwischen den Gruppen nicht unterscheiden, führt auch eine starke Pretest-Posttest-Korrelation nicht zu einem Unterschied zwischen adjustierten und tatsächlichen Gruppenmittelwerten.
- In randomisierten kontrollierten Studien (“experimentellen Designs”) ist der Zweck der Randomisierung gerade die Minimierung von Unterschieden zwischen Gruppen in den Pretest-Daten.
- In randomisierten kontrollierten Studien sollten in der Regel die adjustierten Posttest-Gruppenmittelwerte also nur wenig von den tatsächlichen Posttest-Gruppenmittelwerten abweichen.
- Die Bestimmung adjustierter Posttest-Gruppenmittelwerte im Rahmen einer Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate ist also insbesondere bei nicht-randomisierten Studien (“quasiexperimentellen Designs”) mit erheblichen in den Pretest-Daten bestehenden Gruppenunterschieden sinnvoll.

vgl. Maxwell et al. (2018), Kapitel 9

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

Change-Score-Varianzanalyse

- Change-Scores werden auch als Gain-Scores oder Difference-Scores bezeichnet
- Einfaktorielle Varianzanalyse/Zweistichproben-T-Test-Analyse der Posttest-Pretest-Differenzen
- Rückführung bivariater Proband:innendaten (Pre, Post) auf univariates Maß (Posttest-Pretest)
- Langanhaltende Debatte zur Validität und Äquivalenz bezüglich Posttest-Kovarianzanalyse

vgl. z.B. Lord (1967), Allison (1990), Maris (1998)

Strukturelle Modellform

Für $i = 1, \dots, n$ Proband:innen seien y_{i0} und y_{i1} die Pretest- bzw. Posttest-Daten. Weiterhin seien

$$y_{i1} - y_{i0} \quad (9)$$

die Differenzen von Posttest- und Pretest-Daten.

Dann hat das Change-Score-Analysemodell die strukturelle Modellform

$$y_{i1} - y_{i0} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (10)$$

mit

- $x_i := 0$ für Proband:in i in Kontrollgruppe
- $x_i := 1$ für Proband:in i in Treatmentgruppe
- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ u.i.v.

Parameterbedeutungen

β_0	Erwartungswert der Posttest-Pretest-Differenzen in der Kontrollgruppe
β_1	Erwartungswertunterschied der Posttest-Pretest-Differenzen zwischen Kontroll- und Treatmentgruppe
σ^2	Variabilität der Posttest-Pretest-Differenzen zwischen Proband:innen

Designmatrixform für das Anwendungsbeispiel

$$y = X\beta + \varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_{11} - y_{10} \\ y_{21} - y_{20} \\ y_{31} - y_{30} \\ y_{41} - y_{40} \\ y_{51} - y_{50} \\ y_{61} - y_{60} \\ y_{71} - y_{70} \\ y_{81} - y_{80} \\ y_{91} - y_{90} \\ y_{101} - y_{100} \\ y_{111} - y_{110} \\ y_{121} - y_{120} \\ y_{131} - y_{130} \\ y_{141} - y_{140} \\ y_{151} - y_{150} \\ y_{161} - y_{160} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9 \\ \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{16} \end{pmatrix} \quad (11)$$

mit

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \varepsilon \sim N(0_{16}, \sigma^2 I_{16}) \quad (12)$$

Modellevaluation für das Anwendungsbeispiel

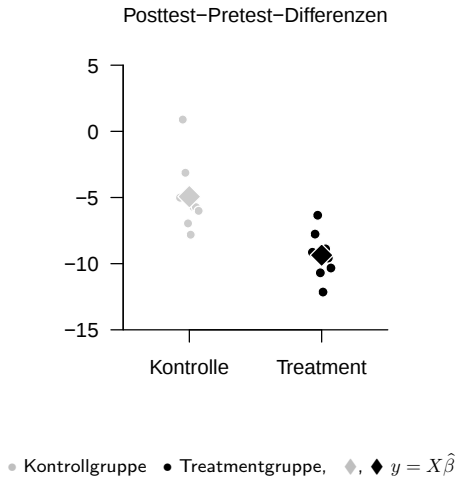
```
D      = read.csv("3-Daten/pre-post.csv", row.names = 1) # Dateneinlesen
D$CS   = D$Post - D$Pre                                # Change-Score-Berechnung
M      = lm(CS ~ Gruppe, data = D)                     # Modellformulierung und -schätzung
beta_hat = summary(M)$coefficients                     # Betaparameterschätzer
sigsqr_hat = summary(M)$sigma^2                       # Varianzparameterschätzer
ki      = confint(M, level = 0.95)                     # Betaparameterkonfidenzintervalle
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	KI.u	KI.o
(Intercept)	-4.934	0.815	-6.053	0.000	-6.682	-3.186
GruppeTreatment	-4.426	1.153	-3.840	0.002	-6.898	-1.954
sigma^2	5.315					

⇒ Geschätzter Erwartungswertunterschied zwischen Treatment- und Kontrollgruppe: -4.43 ($\pm$ 1.15)

Change-Score-Varianzanalyse

Visualisierung für das Anwendungsbeispiel



Dokumentation

Anwendungsbeispiel Klinische Psychologie

Eine Change-Score-Varianzanalyse zeigte eine stärkere Abnahme der depressiven Symptomatik in der KVT-Gruppe als in der Wartelistenkontrollgruppe, $b = -4.43$, $SE = 1.15$, 95%-KI $[-6.90, -1.95]$, $t(14) = -3.84$, $p = .002$. Die mittlere Posttest-Pretest-Differenz betrug -4.93 Skalenpunkte in der Kontrollgruppe und -9.36 Skalenpunkte in der KVT-Gruppe. Die depressive Symptomatik nahm in der KVT-Gruppe somit im Mittel um geschätzt 4.43 Skalenpunkte stärker ab als in der Kontrollgruppe.

Anwendungsbeispiel Umweltpsychologie

Eine Change-Score-Varianzanalyse ergab eine stärkere Verringerung des Stromverbrauchs in der Feedbackgruppe als in der Kontrollgruppe ohne Feedback, $b = -4.43$, $SE = 1.15$, 95%-KI $[-6.90, -1.95]$, $t(14) = -3.84$, $p = .002$. Die mittlere Posttest-Pretest-Differenz betrug -4.93 Einheiten in der Kontrollgruppe und -9.36 Einheiten in der Feedbackgruppe. Der Stromverbrauch ging in der Feedbackgruppe somit im Mittel um geschätzt 4.43 Einheiten stärker zurück als in der Kontrollgruppe.

Change-Score-Varianzanalyse

Spezielle Äquivalenzen der bisher betrachteten Modelle für $i = 1, \dots, n$

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate	y_{i1}	$= \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 y_{i0} + \varepsilon_i$
Posttest-Varianzanalyse	y_{i1}	$= \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$
Change-Score-Varianzanalyse	$y_{i1} - y_{i0}$	$= \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

Für das Posttest-Kovarianzanalysemodell mit Pretest-Kovariate gelte $\beta_2 := 0$

- Dann gilt

$$y_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_i + 0 \cdot y_{i0} + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (13)$$

und das Posttest-Kovarianzanalysemodell ist äquivalent zum Posttest-Varianzanalysemodell.

Für das Posttest-Kovarianzanalysemodell mit Pretest-Kovariate gelte $\beta_2 := 1$

- Dann gilt

$$y_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_i + 1 \cdot y_{i0} + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + y_{i0} + \varepsilon_i \Leftrightarrow y_{i1} - y_{i0} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (14)$$

und das Posttest-Kovarianzanalysemodell ist äquivalent zum Change-Score-Varianzanalysemodell.

Allgemeinere Einsichten in die Beziehungen zwischen den hier betrachteten Modellen erlaubt an späterer Stelle die bivariate Analyse des Gruppen $\times$ Zeitpunkt-Linear-Mixed-Models mit zufälligen Proband:inneneffekt

Lord-Paradox

- Divergierende Resultate bei Posttest-Kovarianz- und Change-Score-Varianzanalyse
- $\Leftrightarrow$ Divergierende Resultate bei unterschiedlichen "Korrekturen" für Pretestunterschiede
- Insbesondere bei Pretest-Gruppenunterschieden ("Quasiexperimenten") bedeutsam
- Letztlich unterschiedliche korrekte Antworten auf unterschiedliche Fragen

Lord-Paradox Beispiel Annahmen

- Parallelgruppen-Pretest-Posttest-Design
- Kein Effekt der Treatment- bzw. Kontrollintervention
- Pretest-Gruppenerwartungswertunterschiede
- Positive Pretest-Post-Korrelation

Lord-Paradox Beispiel Resultate

- Change-Score-Varianzanalyse zeigt keinen Gruppenunterschied der Veränderung
- Mit Pretest-Kovariate adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte zeigen Gruppenunterschied

vgl. Lord (1967), Fitzmaurice (2001), Wainer and Brown (2006)

Lord-Paradox

Beispiel Datengeneration

```
set.seed(0) # Zufallszahlengeneratorzustand
library(MASS) # Multivariate Normalverteilung
n_1 = 100 # Anzahl Proband:innen Kontrollgruppe
n_2 = 100 # Anzahl Proband:innen Treatmentgruppe
n = n_1 + n_2 # Gesamtanzahl Proband:innen
P = 1:n # Proband:innen ID
gruppe = c(rep("Kontrolle", n_1), rep("Treatment", n_2)) # Gruppenfaktor
mu_1 = matrix(c(25,25), nrow = 2) # Kontroll-Pre-Post-Erwartungswerte
mu_2 = matrix(c(30,30), nrow = 2) # Treatment-Pre-Post-Erwartungswerte
Sigma = matrix(c(4,1,1,4), nrow = 2) # Pre-Post-Kovarianzmatrix
Y = rbind(mvnorm(n_1, mu_1, Sigma), mvnorm(n_2, mu_2, Sigma)) # Datensatz
D = data.frame(P = P, Gruppe = gruppe, Pre = Y[,1], Post = Y[,2]) # Dataframe
write.csv(D, "3-Daten/pre-post-lord.csv") # Speichern
```

Lord-Paradox

Kontrolle für Pretest-Unterschiede durch Change-Score-Analyse

```
D      = read.csv("3-Daten/pre-post-lord.csv", row.names = 1) # Dateneinlesen
D$CS   = D$Post - D$Pre                                     # Change-Score-Berechnung
M1     = lm(CS ~ Gruppe, data = D)                          # Modellformulierung und -schätzung
beta_hat = summary(M1)$coefficients                         # Betaparameterschätzer
sigsqr_hat = summary(M1)$sigma^2                            # Varianzparameterschätzer
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.11	0.23	-0.48	0.63
GruppeTreatment	0.12	0.33	0.36	0.72
sigma^2	5.48			

⇒ Geringer und nicht signifikanter Effekt von Treatment

Lord-Paradox

Kontrolle für Pretest-Unterschiede durch Auswertung Pretest-adjustierter Posttest-Gruppenunterschiede

```
library(emmeans)
D      = read.csv("3-Daten/pre-post-lord.csv", row.names = 1) # Dateneinlesen
M2     = lm(Post ~ Gruppe + Pre, data = D)                  # Modellformulierung und -schätzung
M2a    = emmeans(M2, "Gruppe")                             # Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte
summary(M2a)                                                # Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwerte
```

Gruppe	emmean	SE	df	lower.CL	upper.CL
Kontrolle	25.7	0.265	197	25.2	26.2
Treatment	29.4	0.265	197	28.9	29.9

Confidence level used: 0.95

```
pairs(M2a)                                                # Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwertsdifferenz
```

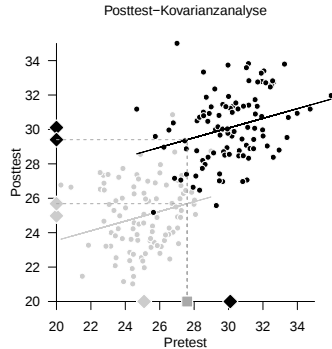
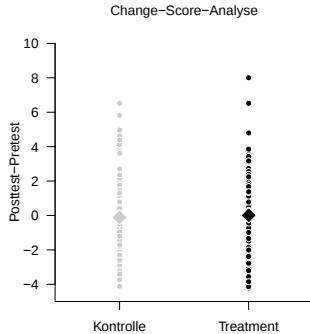
contrast	estimate	SE	df	t.ratio	p.value
Kontrolle - Treatment	-3.72	0.455	197	-8.181	<0.0001

⇒ Adjustierte Posttest-Gruppenmittelwertsdifferenz signifikant unterschiedlich

Change-Score-Varianzanalyse

Lord-Paradox

Beispiel Visualisierung



● Kontrollgruppe, ● Treatmentgruppe

Lord-Paradox

Fragestellung bei Change-Score-Varianzanalyse

“Gibt es einen Erwartungswertunterschied in der Pre-Post-Veränderung zwischen Kontrolle und Treatment?”

- Die Frage wird unabhängig von, d.h. gemittelt über alle, möglichen Pretestwerte gestellt.
- In diesem Sinn ist die Fragestellung bei Change-Score-Varianzanalyse “unbedingt” bzw. “marginal”.
- Die Fragestellung ist die entscheidende Fragestellung in der Evaluation von Interventionen.

Fragestellung bei Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate und adjustierten Posttest-Gruppenmittelwerten

“Gibt es einen Posttest-Erwartungswertunterschied zwischen einer Kontrollgruppenproband:in und einer Treatmentgruppenproband:in mit identischem Pretest-Wert?”

- Die Frage wird explizit bedingt auf einen der möglichen Pretestwerte gestellt.
- In diesem Sinn ist die Fragestellung bei Posttest-Kovarianzanalysen “bedingt” bzw. “conditional”.
- Die Fragestellung ist bei der Evaluation von Interventionen nicht entscheidend und im Idealfall gibt es in randomisierten Designs sowieso keine Pretest-Gruppenunterschiede bezüglich der primären Zielvariablen.

vgl. Fitzmaurice (2001)

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

Linear-Mixed-Model-Analyse

- Aktuell präferierte Analyseform, vgl. Detry and Ma (2016), Yu et al. (2022)
- Parameter für Gruppeneffekte, Zeitpunkteffekte, Gruppen $\times$ Zeitpunkt-Interaktionen
- Durch Hinzunahme von Random-Effects ergibt sich eine Vielzahl möglicher Analysemodelle
- Für einen Überblick und einen systematischen Vergleiche, siehe Tango (2017)
- Generell variable Kombinationen von Fixed- und Random Effekten möglich
- Fokus hier auf einem Pretest-Posttest-LMM nach Crager (1987) und Chen (2006)
- Fokus hier auf Bezügen zu den bisher betrachteten Modellen

Strukturelle Modellform

Für $i = 1, \dots, n$ Proband:innen seien y_{i0} und y_{i1} die Pretest- bzw. Posttest-Daten.

Dann hat das *Gruppen*×*Zeitpunkt*-LMM mit zufälligem Proband:inneneffekt die Form

$$\begin{aligned}y_{i0} &= \beta_0 + \beta_1 x_i && + b_i + \varepsilon_{i0} \\y_{i1} &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i + b_i + \varepsilon_{i1}\end{aligned}\tag{15}$$

mit

- $x_i := 0$ für Proband:in i in Kontrollgruppe
- $x_i := 1$ für Proband:in i in Treatmentgruppe
- $\varepsilon_{i0} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ und $\varepsilon_{i1} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ u.i.v.
- $b_i \sim N(0, \sigma_b^2)$ u.i.v.

Parameterbedeutungen

β_0	Erwartungswert im Pretest der Kontrollgruppe
β_1	Erwartungswertunterschied im Pretest zwischen Kontroll- und Treatmentgruppe
β_2	Erwartungswertunterschied zwischen Posttest und Pretest in der Kontrollgruppe
β_3	Unterschied der Posttest-Pretest-Erwartungswertunterschiede zwischen Kontroll- und Treatmentgruppe
σ_ε^2	Varianz der Fehlerterme in Pretest und Posttest in Kontroll- und Treatmentgruppe
σ_b^2	Varianz des zufälligen Proband:innen-spezifischen Intercepts

Linear-Mixed-Model-Analyse

Designmatrixform für das Anwendungsbeispiel

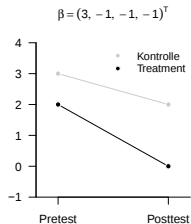
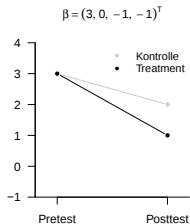
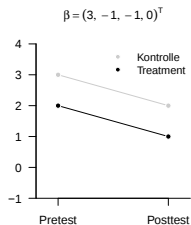
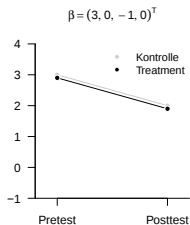
$$y = X\beta + Zb + \varepsilon$$

$$y = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{11} \\ y_{20} \\ y_{21} \\ y_{30} \\ y_{31} \\ y_{40} \\ y_{41} \\ y_{50} \\ y_{51} \\ y_{60} \\ y_{61} \\ y_{70} \\ y_{71} \\ y_{80} \\ y_{81} \\ y_{90} \\ y_{91} \\ y_{100} \\ y_{101} \\ y_{110} \\ y_{111} \\ y_{120} \\ y_{121} \\ y_{130} \\ y_{131} \\ y_{140} \\ y_{141} \\ y_{150} \\ y_{151} \\ y_{160} \\ y_{161} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \\ b_{16} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{20} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{30} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{40} \\ \varepsilon_{41} \\ \varepsilon_{50} \\ \varepsilon_{51} \\ \varepsilon_{60} \\ \varepsilon_{61} \\ \varepsilon_{70} \\ \varepsilon_{71} \\ \varepsilon_{80} \\ \varepsilon_{81} \\ \varepsilon_{90} \\ \varepsilon_{91} \\ \varepsilon_{100} \\ \varepsilon_{101} \\ \varepsilon_{110} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{120} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{130} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{140} \\ \varepsilon_{141} \\ \varepsilon_{150} \\ \varepsilon_{151} \\ \varepsilon_{160} \\ \varepsilon_{161} \end{pmatrix}$$

mit

$$\varepsilon \sim N(0_{32}, \sigma_\varepsilon^2 I_{32}) \text{ und } b \sim N(0_{16}, \sigma_b^2 I_{16}) \text{ u.v.}$$

Expressivität der Fixed-Effects-Erwartungswerte des Modells (vgl. 2×2 ANOVA)



Linear-Mixed-Model-Analyse

Longformat Datenrepräsentation für das Anwendungsbeispiel

```
library(tidyverse)
D      = read.csv("3-Daten/pre-post.csv", row.names = 1)           # Dateneinlesen
D      = D %>% pivot_longer(cols = c(Pre, Post), names_to = "Zeitpunkt", # Zeitpunktkodierung
                           values_to = "Y")                       # Zielvariablenkodierung
D$Zeitpunkt = factor(D$Zeitpunkt, levels = c("Pre", "Post"))      # Zeitfaktor-Kodierung
```

P	Gruppe	Zeitpunkt	Y
1	Kontrolle	Pre	37
1	Kontrolle	Post	32
2	Kontrolle	Pre	31
2	Kontrolle	Post	32
3	Kontrolle	Pre	37
3	Kontrolle	Post	33
4	Kontrolle	Pre	38
4	Kontrolle	Post	31
5	Kontrolle	Pre	37
5	Kontrolle	Post	29
6	Kontrolle	Pre	32
6	Kontrolle	Post	27
7	Kontrolle	Pre	34
7	Kontrolle	Post	28
8	Kontrolle	Pre	35
8	Kontrolle	Post	29
9	Treatment	Pre	34
9	Treatment	Post	24
10	Treatment	Pre	31
10	Treatment	Post	23
11	Treatment	Pre	32
11	Treatment	Post	26
12	Treatment	Pre	32
12	Treatment	Post	21
13	Treatment	Pre	34
13	Treatment	Post	22
14	Treatment	Pre	34
14	Treatment	Post	25
15	Treatment	Pre	34
15	Treatment	Post	24
16	Treatment	Pre	35
16	Treatment	Post	25

Linear-Mixed-Model-Analyse

Modellevaluation für das Anwendungsbeispiel

```
library(nlme)

D      = read.csv("3-Daten/pre-post.csv", row.names = 1)
D      = D %>% pivot_longer(cols = c(Pre, Post), names_to = "Zeitpunkt",
                           values_to = "Y")
D$Zeitpunkt = factor(D$Zeitpunkt, levels = c("Pre", "Post"))
M      = lme(Y ~ Gruppe*Zeitpunkt, data = D, random = ~ 1 | P)
X      = model.matrix(M,D)
Z      = model.matrix(~ M$groups[[1]] - 1)
beta_hat = M$coefficients$fixed
b_hat    = M$coefficients$random$P
s_eps_hat = M$sigma**2
s_b_hat   = diag(getVarCov(M))
ci        = intervals(M, level = 0.95, which = "fixed")
```

nlme
Dateneinlesen
Zeitpunktkodierung
Zielvariablenkodierung
Zeitfaktor-Kodierung
LMM
Fixed-Effects-Designmatrix
Random-Effects-Designmatrix
Fixed-Effects-Schätzer
Random-Effects-Schätzer
Varianzkomponentenschätzer
Varianzkomponentenschätzer
Konfidenzintervalle

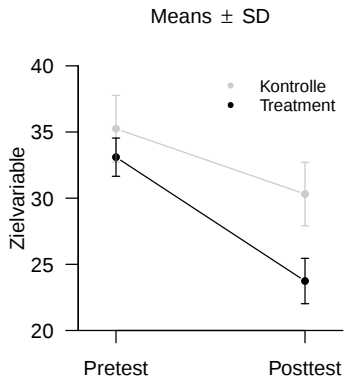
```
beta_hat      : 35.25 -2.15 -4.93 -4.43
b_hat         : 1.15 -0.49 1.22 1.16 0.27 -1.74 -1.11 -0.46 0.3 -0.87 0.49 -1.23 -0.19 0.43 0.18 0.87
sigsqr_b_hat  : 1.63
sigsqr_eps_hat : 2.66
```

Approximate 95% confidence intervals

```
Fixed effects:
              lower est.  upper
(Intercept)   33.68 35.25 36.8151
GruppeTreatment -4.37 -2.15  0.0725
ZeitpunktPost  -6.68 -4.93 -3.1858
GruppeTreatment:ZeitpunktPost -6.90 -4.43 -1.9536
```

⇒ Signifikanter Gruppe × Zeitpunkt-Effekt

Visualisierung für das Anwendungsbeispiel



Dokumentation

Anwendungsbeispiel Klinische Psychologie

Eine Linear-Mixed-Model-Analyse mit festen Effekten für Gruppe, Zeitpunkt und Gruppe $\times$ Zeitpunkt sowie zufälligem Proband:inneneffekt zeigte einen signifikanten Gruppe $\times$ Zeitpunkt-Effekt, $b = -4.43$, $SE = 1.15$, 95%-KI $[-6.90, -1.95]$, $t(14) = -3.84$, $p = .002$. Die mittleren Werte lagen in der Kontrollgruppe bei 35.25 im Pretest und 30.31 im Posttest sowie in der KVT-Gruppe bei 33.10 im Pretest und 23.74 im Posttest. Der negative Interaktionseffekt entspricht einer um geschätzt 4.43 Skalenpunkte stärkeren Posttest-Pretest-Abnahme der depressiven Symptomatik in der KVT-Gruppe.

Anwendungsbeispiel Umweltpsychologie

Eine Linear-Mixed-Model-Analyse mit festen Effekten für Gruppe, Zeitpunkt und Gruppe $\times$ Zeitpunkt sowie zufälligem Proband:inneneffekt ergab einen signifikanten Gruppe $\times$ Zeitpunkt-Effekt, $b = -4.43$, $SE = 1.15$, 95%-KI $[-6.90, -1.95]$, $t(14) = -3.84$, $p = .002$. Der mittlere Stromverbrauch lag in der Kontrollgruppe bei 35.25 im Pretest und 30.31 im Posttest sowie in der Feedbackgruppe bei 33.10 im Pretest und 23.74 im Posttest. Der negative Interaktionseffekt entspricht einer um geschätzt 4.43 Einheiten stärkeren Posttest-Pretest-Verringerung des Stromverbrauchs in der Feedbackgruppe.

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

Überblick und Hauptaussagen

(1) Marginale Datenverteilung des LMMs für Proband:in i

⇒ Induktion von Fehlerkovarianz durch zufällige Proband:inneneffekte

(2) Regression-zur-Mitte-Effekt

⇒ Bedingte Bewegung extremer Messwerte in Richtung von Gruppenerwartungswerten

(3) Induktion des Change-Score-Varianzanalyse-Modells

⇒ Change-Score-Varianzanalyse als Differenzvariante des LMMs

(4) Posttest-Kovarianzanalyse als bedingte Change-Score-Verteilung

⇒ Kovarianzanalyse als spezialisierte Change-Score-Analyse

(1) Marginale Datenverteilung des LMMs für Proband:in i

Für Proband:in i hat das Gruppen×Zeitpunkt-LMM mit zufälligem Proband:inneneffekt die Designmatrixform

$$y = X\beta + Zb + \varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_{i0} \\ y_{i1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & 0 & 0 \\ 1 & x_i & 1 & x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (b_i) + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i0} \\ \varepsilon_{i1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

mit

$$\varepsilon \sim N(0_2, \sigma_\varepsilon^2 I_2) \text{ und } b \sim N(0, \sigma_b^2) \text{ u.v.} \quad (17)$$

Nach dem Theorem zur marginalen Datenverteilung des Linear-Mixed-Modells gilt damit

$$y \sim N(\mu_y, \Sigma_y) \text{ mit } \mu_y = X\beta \text{ und } \Sigma_y = \sigma_b^2 Z Z^T + \sigma_\varepsilon^2 I_2 \quad (18)$$

also

$$\mu_y = \begin{pmatrix} 1 & x_i & 0 & 0 \\ 1 & x_i & 1 & x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_i \\ \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i \end{pmatrix} \quad (19)$$

und

$$\Sigma_y = \sigma_b^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_b^2 & \sigma_b^2 \\ \sigma_b^2 & \sigma_b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_b^2 \\ \sigma_b^2 & \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

(1) Marginale Datenverteilung des LMMs für Proband:in i

Für Proband:in i gilt also

$$\begin{pmatrix} y_{i0} \\ y_{i1} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix} \right) \quad (21)$$

mit

$$\mu_{i0} = \beta_0 + \beta_1 x_i \text{ und } \mu_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i \quad (22)$$

sowie

$$\sigma_{00}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 \text{ und } \sigma_{01}^2 = \sigma_{10}^2 = \sigma_b^2 \quad (23)$$

Äquivalent gilt also

$$y = X\beta + \epsilon \text{ mit } \epsilon \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix} \right) \quad (24)$$

Man erkennt also, dass die Annahme eines zufälligen Proband:inneneffektes i in der Verteilung der Pretest- und Posttest-Daten von Proband:in i eine Daten- und Fehlerkovarianz von

$$\mathbb{C}(y_{i0}, y_{i1}) = \sigma_b^2 = \mathbb{C}(\epsilon_{i0}, \epsilon_{i1}) \quad (25)$$

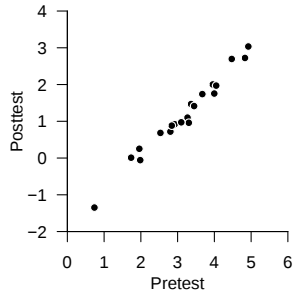
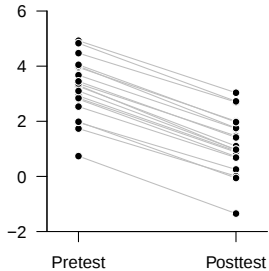
bzw. eine Daten- und Fehlerkorrelation von

$$\rho(y_{i0}, y_{i1}) = \frac{\mathbb{C}(y_{i0}, y_{i1})}{\sqrt{\mathbb{V}(y_{i0})}\sqrt{\mathbb{V}(y_{i1})}} = \frac{\mathbb{C}(y_{i0}, y_{i1})}{\mathbb{V}(y_{i0})} = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{C}(\epsilon_{i0}, \epsilon_{i1})}{\mathbb{V}(\epsilon_{i0})} = \frac{\mathbb{C}(\epsilon_{i0}, \epsilon_{i1})}{\sqrt{\mathbb{V}(\epsilon_{i0})}\sqrt{\mathbb{V}(\epsilon_{i1})}} = \rho(\epsilon_{i0}, \epsilon_{i1})$$

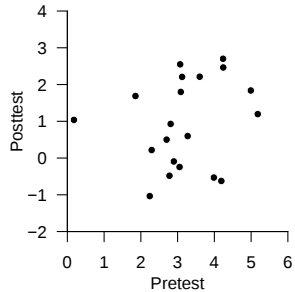
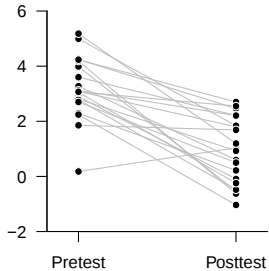
induziert.

Bivariate Analyse

(1) Marginale Datenverteilung des LMMs für Proband:in i für $\sigma_b = 1$, $\sigma_\varepsilon = 0.01$



(1) Marginale Datenverteilung des LMMs für Proband:in i für $\sigma_b = 1$, $\sigma_\varepsilon = 100$



(2) Regression-zur-Mitte-Effekt

Begriff *Regression zur Mitte* bezeichnet das Phänomen, dass extrem hohe oder extrem niedrige Messwerte bei einer späteren Messung im Mittel weniger extrem ausfallen.

Beobachtet wird der Effekt insbesondere bei Wiederholungsmessungen wie Pretest-Posttest-Designs.

Beispiel

- Personen mit extrem hohen Depressionswerten im Pretest zeigen im Mittel geringere Werte im Posttest.
- Personen mit extrem niedrigen Depressionswerten im Pretest zeigen im Mittel höhere Werte im Posttest.

Der Effekt tritt bereits ohne jede Intervention auf.

Historisch wurde das Phänomen erstmals systematisch von Galton (1886) im Kontext der Vererbung von Körpergrößen beschrieben. Galton beobachtete, dass sehr große Eltern im Mittel kleinere Kinder haben, während sehr kleine Eltern im Mittel größere Kinder haben. Galton bezeichnete dieses Phänomen als *regression toward mediocrity*. Der moderne Begriff geht auf spätere statistische Literatur zurück, insbesondere auf Pearson (1896).

(2) Regression-zur-Mitte-Effekt

Intuitive Erläuterung

- Eine Proband:in habe einen festen Gruppenerwartungswert μ bezüglich der primären Zielvariable.
- Für die Pretest- und Posttestfehlervariablen gelte

$$\varepsilon_{i0} \sim N(0, \sigma^2) \text{ und } \varepsilon_{i1} \sim N(0, \sigma^2), \text{ also } \mathbb{V}(\varepsilon_{i0}) = \mathbb{V}(\varepsilon_{i1}). \quad (26)$$

- In der Pretest-Messung zeige sich ein hoher Wert $y_{i0} = \mu + \varepsilon_{i0}$ durch einen hohen Fehlerbeitrag ε_{i0} .
- Hohe Abweichungen von $\varepsilon_{i0} \sim N(0, \sigma^2)$ von 0 sind unwahrscheinlicher als geringe Abweichungen.
- Der Pretestwert für die Proband:in ist also bezüglich des Gruppenerwartungswerts untypisch.
- In der Posttest-Messung ist ε_{i1} mit hoher Wahrscheinlichkeit geringer als ε_{i0} , da auch $\varepsilon_{i1} \sim N(0, \sigma^2)$
- Damit ist aber auch $y_{i1} = \mu + \varepsilon_{i1}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit geringer als y_{i0} .
- Bedingt auf y_{i0} zeigt sich eine durch den Zufallsfehler induzierte Reduktion in der primären Zielvariablen.
- Marginal, d.h. über viele Proband:innen gemittelt, besitzt die Fehlervariable aber weiterhin den Erwartungswert 0. Bezüglich von Gruppenanalysen in Pretest-Posttest-Designs ist der Regression-zur-Mitte-Effekt daher weitgehend unerheblich, allerdings nur sofern die Proband:innen nicht anhand extremer Pretest-Werte vorselektiert wurden.

(2) Regression-zur-Mitte-Effekt

Formale Erläuterung

- Für Proband:in i gelte die marginale Verteilung des LMMs mit $\mu_i := \mu_{i0} = \mu_{i1}$, also

$$\begin{pmatrix} y_{i0} \\ y_{i1} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix} \right) \text{ mit } \sigma_{00}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2 \text{ und } \sigma_{01}^2 = \sigma_{10}^2 = \sigma_b^2. \quad (27)$$

Dann gilt nach dem Theorem zu bedingten Normalverteilungen, dass

$$\mathbb{E}(y_{i1}|y_{i0}) = \mu_i + \frac{\mathbb{C}(y_{i0}, y_{i1})}{\mathbb{V}(y_{i0})}(y_{i0} - \mu_i) = \mu_i + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2}(y_{i0} - \mu_i) = \mu_i + \rho(y_{i0}, y_{i1})(y_{i0} - \mu_i). \quad (28)$$

Damit folgt

$$\mathbb{E}(y_{i1}|y_{i0}) - \mu_i = \rho(y_{i0}, y_{i1})(y_{i0} - \mu_i). \quad (29)$$

Wegen

$$0 \leq \rho(y_{i0}, y_{i1}) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2} \leq 1 \quad (30)$$

und mit Fallunterscheidung bezüglich der Vorzeichen gilt

$$|\mathbb{E}(y_{i1}|y_{i0}) - \mu_i| \leq |y_{i0} - \mu_i|. \quad (31)$$

Bei $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, also $\rho(y_{i0}, y_{i1}) < 1$, gilt obige Ungleichung insbesondere strikt. Extreme Pretest-Abweichungen werden dann in Erwartung also weniger extrem im Posttest reproduziert.

(2) Regression-zur-Mitte-Effekt

Formale Erläuterung

- Für $\sigma_b^2 = 0$ gelten $\mathbb{C}(y_{i0}, y_{i1}) = 0$ und $\rho(y_{i0}, y_{i1}) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2} = 0$. Damit folgt in diesem Fall

$$\mathbb{E}(y_{i1}|y_{i0}) = \mu_{i1} + 0 \cdot (y_{i0} - \mu_{i0}) = \mu_{i1}. \quad (32)$$

Der erwartete Posttest-Wert entspricht also unabhängig vom beobachteten Pretest-Wert exakt dem marginalen Posttest-Erwartungswert.

- Für $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ gilt $\sigma_{00}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_b^2$. Damit folgt in diesem Fall

$$\rho(y_{i0}, y_{i1}) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2} = 1. \quad (33)$$

und es folgt

$$\mathbb{E}(y_{i1}|y_{i0}) = \mu_{i1} + (y_{i0} - \mu_{i0}) = y_{i0}. \quad (34)$$

Die Pretest-Abweichung wird also vollständig im erwarteten Posttest-Wert reproduziert:

$$|\mathbb{E}(y_{i1}|y_{i0}) - \mu_{i1}| = |y_{i0} - \mu_{i0}|. \quad (35)$$

Bei verschwindender Residualvarianz tritt daher keine Regression zur Mitte auf.

(2) Regression-zur-Mitte-Effekt

Regression-zur-Mitte-Effekt und Fehlerunabhängigkeit

- Bekanntlich heißen die Zufallsvariablen ε_{i0} und ε_{i1} unabhängig, wenn ihre gemeinsame Dichte in das Produkt ihrer marginalen Dichten faktorisiert bzw. ihre bedingte Dichte ihrer marginalen Dichte gleicht,

$$p(\varepsilon_{i0}, \varepsilon_{i1}) = p(\varepsilon_{i0})p(\varepsilon_{i1}) \Leftrightarrow p(\varepsilon_{i1}|\varepsilon_{i0}) = p(\varepsilon_{i1}). \quad (36)$$

Die Beobachtung eines extremen Fehlerwertes ε_{i0} verändert die Verteilung von ε_{i1} also nicht und in diesem Sinne ist ε_{i0} für ε_{i1} nicht prädiktiv.

- Daraus folgt aber nicht, dass bei Beobachtung eines extremen Fehlerwertes ε_{i0} ein erneut extremer Fehlerwert ε_{i1} wahrscheinlich ist. Vielmehr gilt im aktuellen Kontext weiterhin $\varepsilon_{i1} \sim N(0, \sigma^2)$. Werte von ε_{i1} nahe 0 liegen in Bereichen hoher Dichte, während sehr große positive oder negative Werte von ε_{i1} in Bereichen niedriger Dichte liegen.
- Wenn ε_{i0} extrem war, also in einem Bereich niedriger Dichte lag, dann ist ein typischerer Wert von ε_{i1} mit höherer Dichte wahrscheinlicher als erneut ein ähnlich extremer Wert. Dies ist allerdings keine Änderung der bedingten Verteilung. Die bedingte Verteilung bleibt unter Unabhängigkeit identisch mit der marginalen Verteilung. Es ist vielmehr eine Aussage über die Form dieser unveränderten Verteilung: extreme Werte sind selten, typische Werte nahe dem Erwartungswert sind häufig.
- Genau deshalb gilt bei unabhängigen Fehlern

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{i1}|\varepsilon_{i0}) = \mathbb{E}(\varepsilon_{i1}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(y_{i1}|y_{i0}) = \mu_{i1}. \quad (37)$$

- Der Regression-zur-Mitte-Effekt entsteht hier also nicht durch eine negative Abhängigkeit der Fehler, sondern durch die Nicht-Reproduzierbarkeit extremer Fehlerwerte bei unabhängigen Wiederholungen.

(3) Induktion des Change-Score-Varianzanalyse-Modells

Für den Change-Score für Proband:in i , also die Posttest-Pretest-Differenz

$$d_i := y_{i1} - y_{i0} \quad (38)$$

betrachten wir die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors

$$z := (y_{i0}, y_{i1}, d_i)^T \quad (39)$$

vor dem Hintergrund des Gruppen×Zeitpunkt-LMMs mit zufälligem Proband:inneneffekt. Dazu halten wir zunächst fest, dass

$$z = Ay \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

denn

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{i0} \\ y_{i1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i0} \\ y_{i1} \\ y_{i1} - y_{i0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{i0} \\ y_{i1} \\ d_i \end{pmatrix} \quad (41)$$

(3) Induktion des Change-Score-Varianzanalyse-Modells

Also gilt mit dem Theorem zu linearen Transformation normalverteilter Zufallsvektoren, dass

$$z \sim N(\mu_z, \Sigma_z) \text{ mit } \mu_z = A \begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_z = A \begin{pmatrix} \sigma_{01}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix} A^T. \quad (42)$$

Speziell ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \\ \mu_{i1} - \mu_{i0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_i \\ \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i \\ \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 x_i \\ \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i \\ \beta_2 + \beta_3 x_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

(3) Induktion des Change-Score-Varianzanalyse-Modells

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned}\Sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 \\ \sigma_{10}^2 - \sigma_{00}^2 & \sigma_{11}^2 - \sigma_{01}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 & \sigma_{01}^2 - \sigma_{00}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 & \sigma_{11}^2 - \sigma_{10}^2 \\ \sigma_{10}^2 - \sigma_{00}^2 & \sigma_{11}^2 - \sigma_{01}^2 & \sigma_{11}^2 - \sigma_{01}^2 - (\sigma_{10}^2 - \sigma_{00}^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 & \sigma_{01}^2 - \sigma_{00}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 & \sigma_{11}^2 - \sigma_{10}^2 \\ \sigma_{01}^2 - \sigma_{00}^2 & \sigma_{11}^2 - \sigma_{01}^2 & \sigma_{00}^2 + \sigma_{11}^2 - 2\sigma_{01}^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{44}$$

(3) Induktion des Change-Score-Varianzanalyse-Modells

Ablesen der Marginalverteilung von $d_i = y_{i1} - y_{i0}$ ergibt damit mit

$$\sigma_{00}^2 + \sigma_{11}^2 - 2\sigma_{01}^2 = 2\sigma_b^2 + 2\sigma_\varepsilon^2 - 2\sigma_b^2 = 2\sigma_\varepsilon^2 \quad (45)$$

dass

$$y_{i1} - y_{i0} \sim N(\beta_2 + \beta_3 x_i, 2\sigma_\varepsilon^2) \quad (46)$$

oder äquivalent

$$y_{i1} - y_{i0} = \beta_2 + \beta_3 x_i + \varepsilon_i \text{ mit } \varepsilon_i \sim N(0, 2\sigma_\varepsilon^2) \quad (47)$$

Umbenennen der Parameter durch

$$\beta_2 \mapsto \beta_0, \beta_3 \mapsto \beta_1 \text{ und } 2\sigma_\varepsilon^2 \mapsto \sigma^2 \quad (48)$$

zeigt dann die Äquivalenz zur strukturellen Modellform der Change-Score-Varianzanalyse

$$y_{i1} - y_{i0} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \text{ mit } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2). \quad (49)$$

Das Change-Score-Varianzanalysemodell ist also das ALM, das sich durch Posttest-Pretest-Differenzbildung im Gruppen×Zeitpunkt-LMM mit zufälligen Proband:inneneffekten ergibt. Man beachte die identischen Parameterbezeichnungen der entsprechenden Fixed-Effects-Parameter sowie die Tatsache, dass der Varianzeffekt der Posttest-Pretest-Differenzen über Proband:innen (σ_b^2) durch Differenzbildung innerhalb der Proband:innen aus dem Modell entnommen wird.

(4) Posttest-Kovarianzanalyse als bedingte Change-Score-Verteilung

Wir betrachten schließlich die bedingte Verteilung der Posttest-Pretest-Differenzen gegeben die Pretest-Werte. Anhand der gemeinsamen Verteilung (vgl. Gleichung (42)) von y_{i0}, y_{i1} und d_i ergibt sich mit dem Theorem zu bedingten Normalverteilungen

$$d_i|y_{i0} \sim N\left(\mu_{d_i|y_{i0}}, \Sigma_{d_i|y_{i0}}\right) \quad (50)$$

Insbesondere ergibt sich mit $\rho_{01} := \rho(y_{i0}, y_{i1}) = \sigma_{01}^2 / \sigma_{00}^2$, dass

$$\begin{aligned} \mu_{d_i|y_{i0}} &= \mu_{d_i} + \mathbb{C}(d_i, y_{i0}) \mathbb{V}(y_{i0})^{-1} (y_{i0} - \mu_{y_{i0}}) \\ &= \beta_2 + \beta_3 x_i + \left(\frac{\sigma_{01}^2 - \sigma_{00}^2}{\sigma_{00}^2} \right) (y_{i0} - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ &= \beta_2 + \beta_3 x_i + \left(\frac{\sigma_{01}^2}{\sigma_{00}^2} - \frac{\sigma_{00}^2}{\sigma_{00}^2} \right) (y_{i0} - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ &= \beta_2 + \beta_3 x_i + (\rho_{01} - 1) (y_{i0} - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ &= \beta_2 + \beta_3 x_i + \rho_{01} y_{i0} - y_{i0} - \rho_{01} \beta_0 + \beta_0 - \rho_{01} \beta_1 x_i + \beta_1 x_i \\ &= \beta_0 - \rho_{01} \beta_0 + \beta_1 x_i - \rho_{01} \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i + \rho_{01} y_{i0} - y_{i0} \\ &= (1 - \rho_{01}) \beta_0 + (1 - \rho_{01}) \beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i + (\rho_{01} - 1) y_{i0} \end{aligned} \quad (51)$$

(4) Posttest-Kovarianzanalyse als bedingte Change-Score-Verteilung

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\Sigma_{d_i|y_{i0}} &= \mathbb{V}(d_i) - \mathbb{C}(d_i, y_{i0})\mathbb{V}(y_{i0})^{-1}\mathbb{C}(y_{i0}, d_i) \\&= \sigma_{00}^2 + \sigma_{11}^2 - 2\sigma_{01}^2 - \frac{(\sigma_{01}^2 - \sigma_{00}^2)^2}{\sigma_{00}^2} \\&= \frac{\sigma_{00}^4 + \sigma_{11}^2\sigma_{00}^2 - 2\sigma_{01}^2\sigma_{00}^2}{\sigma_{00}^2} - \frac{\sigma_{01}^4 - 2\sigma_{01}^2\sigma_{00}^2 + \sigma_{00}^4}{\sigma_{00}^2} \\&= \frac{\sigma_{00}^4 + \sigma_{11}^2\sigma_{00}^2 - 2\sigma_{01}^2\sigma_{00}^2 - \sigma_{01}^4 + 2\sigma_{01}^2\sigma_{00}^2 - \sigma_{00}^4}{\sigma_{00}^2} \\&= \frac{\sigma_{11}^2\sigma_{00}^2 - \sigma_{01}^4}{\sigma_{00}^2} \\&= \frac{\sigma_{11}^2\sigma_{00}^2}{\sigma_{00}^2} - \frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{00}^2} \\&= \sigma_{11}^2 - \frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{00}^2}\end{aligned}\tag{52}$$

(4) Posttest-Kovarianzanalyse als bedingte Change-Score-Verteilung

Es ergibt sich also

$$y_{i1} - y_{i0} | y_{i0} \sim N \left((1 - \rho_{01})\beta_0 + (1 - \rho_{01})\beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i + (\rho_{01} - 1)y_{i0}, \sigma_{11}^2 - \frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{00}^2} \right) \quad (53)$$

bzw.

$$y_{i1} - y_{i0} | y_{i0} = (1 - \rho_{01})\beta_0 + (1 - \rho_{01})\beta_1 x_i + \beta_2 + \beta_3 x_i + (\rho_{01} - 1)y_{i0} + \varepsilon_i \text{ mit } \varepsilon_i \sim N \left(0, \sigma_{11}^2 - \frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{00}^2} \right) \quad (54)$$

Nimmt man nun weiterhin an, dass es für die Pretestwerte keine Gruppenunterschiede gibt, also dass $\beta_1 := 0$, so erhält man (vgl. Chen (2006), Seite 4163 oben)

$$\begin{aligned} y_{i1} - y_{i0} | y_{i0} &= (1 - \rho_{01})\beta_0 + \beta_2 + \beta_3 x_i + (\rho_{01} - 1)y_{i0} + \varepsilon_i \\ \Leftrightarrow y_{i1} - y_{i0} | y_{i0} &= (1 - \rho_{01})\beta_0 + \beta_2 + \beta_3 x_i + \rho_{01}y_{i0} - y_{i0} + \varepsilon_i \\ \Leftrightarrow y_{i1} | y_{i0} &= (1 - \rho_{01})\beta_0 + \beta_2 + \beta_3 x_i + \rho_{01}y_{i0} + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (55)$$

(4) Posttest-Kovarianzanalyse als bedingte Change-Score-Verteilung

Umbenennen der Parameter durch

$$(1 - \rho_{01})\beta_0 + \beta_2 \mapsto \beta_0, \beta_3 \mapsto \beta_1, \rho_{01} \mapsto \beta_2 \text{ und } \sigma_{11}^2 - \frac{\sigma_{01}^4}{\sigma_{00}^2} \mapsto \sigma^2 \quad (56)$$

zeigt dann die Äquivalenz zur strukturellen Modellform der Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

$$y_{i1}|y_{i0} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 y_{i0} + \varepsilon_i \text{ mit } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2). \quad (57)$$

Insbesondere zeigen sich dabei der auf den Pretest-Werten bedingte Charakter dieses Modells sowie die Tatsache, dass der Koeffizient der Pretest-Werte im Posttest-Kovarianzanalysemodell im hier betrachteten Spezialfall der Korrelation

$$\rho_{01} = \rho(y_{i0}, y_{i1}) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_\varepsilon^2} \quad (58)$$

der Pretest-Posttest-Werte bzw. Fehlervariablen entspricht (vgl. Theorem A.1 in Crager (1987)).

Einführung

Posttest-Varianzanalyse

Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate

Change-Score-Varianzanalyse

Linear-Mixed-Model-Analyse

Bivariate Analyse

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die wesentlichen Charakteristika eines Parallelgruppen-Pretest-Posttest-Designs.
2. Nennen Sie vier mögliche Datenanalysen für Parallelgruppen-Pretest-Posttest-Designs.
3. Erläutern Sie das Modell der Posttest-Varianzanalyse.
4. Erläutern Sie das Modell der Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate.
5. Erläutern Sie den Begriff der adjustierten Posttest-Gruppenmittelwerte.
6. Erläutern Sie die Bedeutung adjustierter Posttest-Gruppenmittelwerte für randomisierte ("experimentelle") und nicht-randomisierte ("quasiexperimentelle") Studien.
7. Erläutern Sie das Modell der Change-Score-Varianzanalyse.
8. Geben Sie die speziellen Äquivalenzen zwischen den Modellen der Posttest-Varianzanalyse, der Posttest-Kovarianzanalyse mit Pretest-Kovariate und der Change-Score-Varianzanalyse wieder.
9. Erläutern Sie das Lord-Paradox.
10. Erläutern Sie das Gruppen $\times$ Zeitpunkt-LMM mit zufälligem Proband:inneneffekt.
11. Erläutern Sie die marginale Datenverteilung des LMMs für Proband:in i im Kontext der bivariaten Analyse.

Referenzen I

- Allison, Paul D. 1990. "Change Scores as Dependent Variables in Regression Analysis." *Sociological Methodology* 20: 93. <https://doi.org/10.2307/271083>.
- Brogan, Donna R, and Michael H Kutner. 1980. "Comparative Analyses of Pretest-Posttest Research Designs." *The American Statistician* 34 (4): 229–32.
- Chen, Xun. 2006. "The Adjustment of Random Baseline Measurements in Treatment Effect Estimation." *Journal of Statistical Planning and Inference* 136 (12): 4161–75. <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2005.08.046>.
- Crager, Michael R. 1987. "Analysis of Covariance in Parallel-Group Clinical Trials with Pretreatment Baselines." *Biometrics* 43 (4): 895. <https://doi.org/10.2307/2531543>.
- Detry, Michelle A., and Yan Ma. 2016. "Analyzing Repeated Measurements Using Mixed Models." *JAMA* 315 (4): 407. <https://doi.org/10.1001/jama.2015.19394>.
- Fitzmaurice, Garrett. 2001. "A Conundrum in the Analysis of Change." *Nutrition* 17 (4): 360–61. [https://doi.org/10.1016/S0899-9007\(00\)00593-1](https://doi.org/10.1016/S0899-9007(00)00593-1).
- Frison, Lars, and Stuart J. Pocock. 1992. "Repeated Measures in Clinical Trials: Analysis Using Mean Summary Statistics and Its Implications for Design." *Statistics in Medicine* 11 (13): 1685–704. <https://doi.org/10.1002/sim.4780111304>.
- Funatogawa, Ikuko, and Takashi Funatogawa. 2011. "Analysis of Covariance with Pre-Treatment Measurements in Randomized Trials: Comparison of Equal and Unequal Slopes." *Biometrical Journal* 53 (5): 810–21. <https://doi.org/10.1002/bimj.201100065>.
- Funatogawa, Ikuko, and Takashi Funatogawa. 2020. "Longitudinal Analysis of Pre- and Post-Treatment Measurements with Equal Baseline Assumptions in Randomized Trials." *Biometrical Journal* 62 (2): 350–60. <https://doi.org/10.1002/bimj.201800389>.

Referenzen II

- Funatogawa, Takashi, Ikuko Funatogawa, and Yu Shyr. 2011. "Analysis of Covariance with Pre-Treatment Measurements in Randomized Trials Under the Cases That Covariances and Post-Treatment Variances Differ Between Groups: ANCOVA with Baseline in Randomized Trials." *Biometrical Journal* 53 (3): 512–24. <https://doi.org/10.1002/bimj.201000200>.
- Galton, Francis. 1886. "Regression Towards Mediocrity in Hereditary Stature." *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland* 15: 246. <https://doi.org/10.2307/2841583>.
- Goodnight, James, and Walter R Harvey. 1978. *Least Squares Means in the Fixed Effects General Linear Model - SAS Technical Report*. SAS Institute.
- Huck, Schuyler W., and Robert A. McLean. 1975. "Using a Repeated Measures ANOVA to Analyze the Data from a Pretest-Posttest Design: A Potentially Confusing Task." *Psychological Bulletin* 82 (4): 511–18. <https://doi.org/10.1037/h0076767>.
- Jennings, Earl. 1988. "Models for Pretest-Posttest Data: Repeated Measures ANOVA Revisited." *Journal of Educational Statistics* 13 (3): 273–80.
- Lenth, Russell V. 2016. "Least-Squares Means: The R Package **Lsmeans**." *Journal of Statistical Software* 69 (1). <https://doi.org/10.18637/jss.v069.i01>.
- Lord, Frederic M. 1967. "A Paradox in the Interpretation of Group Comparisons." *Psychological Bulletin* 68 (5): 304–5. <https://doi.org/10.1037/h0025105>.
- Maris, Eric. 1998. "Covariance Adjustment Versus Gain Scores—Revisited." *Psychological Methods* 3 (3): 309–27.
- Maxwell, Scott E., Harold D. Delaney, and Ken Kelley. 2018. *Designing Experiments and Analyzing Data: A Model Comparison Perspective*. Third edition. Routledge, Taylor & Francis Group.
- McCulloch, Charles E. 2005. "Repeated Measures ANOVA, R.I.P.?" *CHANCE* 18 (3): 29–33. <https://doi.org/10.1080/09332480.2005.10722732>.

Referenzen III

- O Connell, Nathaniel S, Lin Dai, Yunyun Jiang, et al. 2017. "Methods for Analysis of Pre-Post Data in Clinical Research: A Comparison of Five Common Methods." *Journal of Biometrics & Biostatistics* 08 (01). <https://doi.org/10.4172/2155-6180.1000334>.
- Oakes, J. Michael, and Henry A. Feldman. 2001. "Statistical Power for Nonequivalent Pretest-Posttest Designs: The Impact of Change-Score Versus ANCOVA Models." *Evaluation Review* 25 (1): 3–28. <https://doi.org/10.1177/0193841X0102500101>.
- Pearson, Karl. 1896. "Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. III. Regression, Heredity, and Panmixia." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 18: 253–318. <https://www.jstor.org/stable/90707>.
- Searle, S R, F M Speed, and G A Milliken. 1980. "Population Marginal Means in the Linear Model: An Alternative to Least Squares Means." *The American Statistician* 34 (4): 216–22.
- Senn, Stephen. 2006. "Change from Baseline and Analysis of Covariance Revisited." *Statistics in Medicine* 25 (24): 4334–44. <https://doi.org/10.1002/sim.2682>.
- Tango, Toshiro. 2017. *Repeated Measures Design with Generalized Linear Mixed Models for Randomized Controlled Trials*. 0th ed. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315152097>.
- Wainer, Howard, and Lisa M. Brown. 2006. "Three Statistical Paradoxes in the Interpretation of Group Differences: Illustrated with Medical School Admission and Licensing Data." In *Handbook of Statistics*, vol. 26. Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S0169-7161\(06\)26028-0](https://doi.org/10.1016/S0169-7161(06)26028-0).
- Winer, B J. 1971. *Statistical Principles in Experimental Design*.
- Winkens, Bjorn, Gerard J. P. Van Breukelen, Hubert J. A. Schouten, and Martijn P. F. Berger. 2007. "Randomized Clinical Trials with a Pre- and a Post-Treatment Measurement: Repeated Measures Versus ANCOVA Models." *Contemporary Clinical Trials* 28 (6): 713–19. <https://doi.org/10.1016/j.cct.2007.04.002>.

- Yang, Li, and Anastasios A Tsiatis. 2001. "Efficiency Study of Estimators for a Treatment Effect in a Pretest–Posttest Trial." *The American Statistician* 55 (4): 314–21. <https://doi.org/10.1198/000313001753272466>.
- Yu, Zhaoxia, Michele Guindani, Steven F. Grieco, Lujia Chen, Todd C. Holmes, and Xiangmin Xu. 2022. "Beyond t Test and ANOVA: Applications of Mixed-Effects Models for More Rigorous Statistical Analysis in Neuroscience Research." *Neuron* 110 (1): 21–35. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2021.10.030>.