



# Inferenzstatistik

BSc Psychologie SoSe 2021

Prof. Dr. Dirk Ostwald

## (9) Standardstatistiken und Konfidenzintervalle

Die hier gewählte Darstellung von Konfidenzintervallen basiert auf Held (2008, Abschnitte 3.2.2, 3.2.3, 3.4.4), Moeschlin (2000, Abschnitte 4.1-4.5) und Wasserman (2004, Abschnitte 6.3.2 und 9.7). Für einen verallgemeinerten Zugang zu Konfidenzintervallen, siehe Georgii (2009, Abschnitt 8.1).

## (1) Parameterschätzung

Ziel der Parameterschätzung ist es, einen möglichst guten Tipp für den wahren, aber unbekannten, Parameterwert (oder eine Funktion dessen) abzugeben, typischerweise basierend auf der Beobachtung einer Realisierung von  $X_1, \dots, X_n \sim p_\theta$ .

## (2) Konfidenzintervalle

Das Ziel der Bestimmung von Konfidenzintervallen ist es, basierend auf der Verteilung möglicher Parameterschätzwerte eine quantitative Aussage über die mit dem Schätzwert assoziierte Unsicherheit zu treffen.

## (3) Hypothesentest

Das Ziel der Auswertung von Hypothesentests ist es, basierend auf der angenommenen Verteilung der Beobachtungen  $X_1, \dots, X_n$  in einer möglichst sinnvollen Form zu entscheiden, ob der wahre, aber unbekannte Parameterwert, in einer von zwei sich gegenseitig ausschließenden Untermengen des Parameterraumes, welche man als Hypothesen bezeichnet, liegt.

## Die Standardannahmen frequentistischer Inferenz

- $\mathcal{M}$  sei ein statistisches Modell mit  $X_1, \dots, X_n \sim p_\theta$ . Es wird angenommen, dass ein vorliegender Datensatz eine der möglichen Realisierungen von  $X_1, \dots, X_n \sim p_\theta$  ist.
- Aus frequentistischer Sicht kann man das Experiment unendlich oft wiederholen und zu jedem Datensatz Schätzer oder Statistiken auswerten, z.B. das Stichprobenmittel:

$$\text{Datensatz (1)} : x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \text{ mit } \bar{x}_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(1)}$$

$$\text{Datensatz (2)} : x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \text{ mit } \bar{x}_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(2)}$$

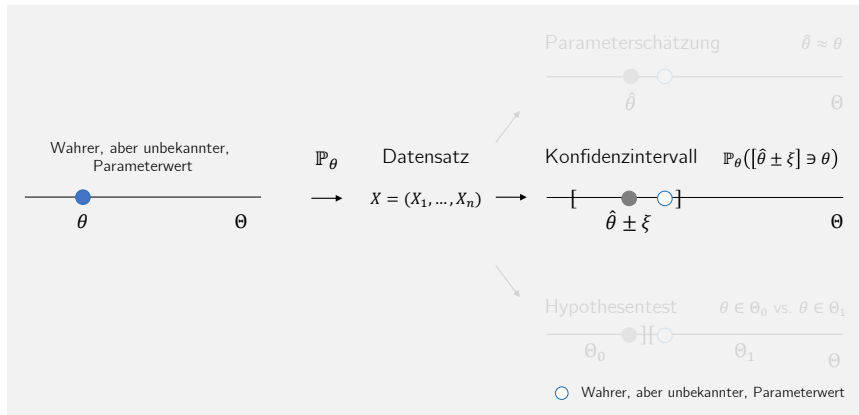
$$\text{Datensatz (3)} : x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}) \text{ mit } \bar{x}_n^{(3)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(3)}$$

$$\text{Datensatz (4)} : x^{(4)} = (x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, \dots, x_n^{(4)}) \text{ mit } \bar{x}_n^{(4)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(4)}$$

$$\text{Datensatz (5)} : x^{(5)} = \dots$$

- Um die Qualität **statistischer** Methoden zu beurteilen betrachtet die frequentistische Statistik deshalb die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schätzern und Statistiken unter Annahme von  $X_1, \dots, X_n \sim p_\theta$ . Was zum Beispiel ist die Verteilung von  $\bar{x}_n^{(1)}$ ,  $\bar{x}_n^{(2)}$ ,  $\bar{x}_n^{(3)}$ ,  $\bar{x}_n^{(4)}$ , ... also die Verteilung der Zufallsvariable  $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ?
- Wenn eine statistische Methode im Sinne der frequentistischen Standardannahme gut ist, dann heißt das also, dass sie bei häufiger Anwendung "im Mittel" gut ist. Im Einzelfall, also bei nur einem Datensatz, kann sie auch recht schlecht sein.

# Standardprobleme frequentistischer Inferenz



## Standardstatistiken und Konfidenzintervalle

- Standardstatistiken
- Definition von Konfidenzintervallen
- Konfidenzintervallbeispiele
- Selbstkontrollfragen

## Standardstatistiken und Konfidenzintervalle

- **Standardstatistiken**
- Definition von Konfidenzintervallen
- Konfidenzintervallbeispiele
- Selbstkontrollfragen

## Z-Statistik

### Theorem (Z-Statistik)

$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  sei die Stichprobe eines Normalverteilungsmodells und  $\bar{X}_n$  bezeichne das Stichprobenmittel. Dann ist die *Z-Statistik*

$$Z := \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) \quad (1)$$

eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, es gilt also  $Z \sim N(0, 1)$ .

### Bemerkungen

- Die WDF einer standardnormalverteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit  $\phi$ .
- Ihre KVF und inverse KVF bezeichnen wir mit  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$ , respektive.

## Z-Statistik

### Beweis

Wir halten zunächst fest, dass mit der Mittelwertstransformation für unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen gilt, dass  $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  (cf. (6) Transformationen der Normalverteilungen). Die Verteilung der Z-Statistik folgt dann mit dem WDF Transformationstheorem bei linear-affinen Abbildungen (cf. *ibid.*) durch Transformation von  $\bar{X}_n$  mit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \bar{x}_n \mapsto f(\bar{x}_n) := \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \bar{x}_n - \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \mu \quad (2)$$

Für die WDF von  $Z$  gilt demnach

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} N\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(z + \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \mu\right); \mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{n}}} \exp\left(-\frac{1}{2 \frac{\sigma^2}{n}} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(z + \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \mu\right) - \mu\right)^2\right) \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{n}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z + \mu - \mu\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \\ &= N(z; 0, 1) \end{aligned} \quad (3)$$

□

## Z-Statistik

### # Modellformulierung

```
mu      = 10
sigsqr  = 4
n       = 12
ns      = 1e4
res     = 1e3
```

```
# w.a.u. Erwartungswertparameter
# wahrer bekannter Varianzparameter
# Stichprobengroesse
# Anzahl Stichprobenrealisierungen
# Ausgangsraumauflösung
```

### # analytische Definitionen und Resultate

```
x_i     = seq(3,17,len = res)
x_bar   = seq(3,17,len = res)
z       = seq(-4,4,len = res)
p_x_i   = dnorm(x_i,mu,sqrt(sigsqr))
p_x_bar = dnorm(x_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))
p_z     = dnorm(z,0,1)
```

```
# x_1 Raum
# x_bar Raum
# z Raum
# x_1 WDF
# x_bar WDF
# z WDF
```

### # Simulation

```
X_i     = rep(NaN, ns)
X_bar   = rep(NaN, ns)
Z       = rep(NaN, ns)
```

```
# X_1 Array
# \bar{X}_{12} Array
# Z Array
```

```
for(s in 1:ns){
  X      = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))
  X_i[s] = X[1]
  X_bar[s] = mean(X)
```

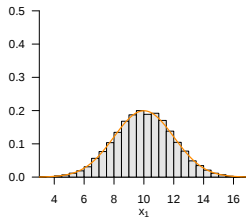
```
# Simulationsiterationen
# Stichprobenrealisierung
# X_i
# Stichprobenmittelrealisierung
```

### # Z-Statistik Realisation

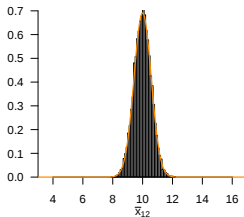
```
Z[s]    = sqrt(n)*((X_bar[s] - mu)/sqrt(sigsqr))
}
```

## Z-Statistik

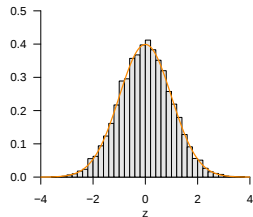
$X_i \sim N(10, 4), i = 1, \dots, 12$



$\bar{X}_{12} \sim N(10, 1/3)$



$Z \sim N(0, 1)$



## $U$ -Statistik

### Theorem ( $U$ -Statistik)

$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  sei die Stichprobe eines Normalverteilungsmodells, und  $S_n^2$  bezeichne die Stichprobenvarianz. Dann ist die  $U$ -Statistik

$$U := \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \quad (4)$$

eine  $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariable mit  $n - 1$  Freiheitsgraden

### Bemerkungen

- Die WDF einer  $\chi^2$ -verteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit  $\chi^2$ .
- Ihre KVF und inverse KVF bezeichnen wir mit  $\Xi$  und  $\Xi^{-1}$ , respektive.
- Die  $U$ -Statistik ist eine normalisierte Stichprobenvarianz.
- Für einen Beweis verweisen wir auf Casella and Berger (2012, Abschnitt 5.3).

## U-Statistik

### # Modellformulierung

```
mu      = 10
sigsqr  = 4
n       = 12
ns      = 1e4
res     = 1e3
```

```
# w.a.u. Erwartungswertparameter
# wahrer bekannter Varianzparameter
# Stichprobengroesse
# Anzahl Stichprobenrealisierungen
# Ausgangsraumauflösung
```

### # analytische Definitionen und Resultate

```
x_i     = seq(3,17,len = res)
x_bar   = seq(3,17,len = res)
u       = seq(0,30,len = res)
p_x_i   = dnorm(x_i,mu,sqrt(sigsqr))
p_x_bar = dnorm(x_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))
p_u     = dchisq(u,n-1)
```

```
# x_1 Raum
# x_bar Raum
# normalized s_n^2 Raum
# x_1 WDF
# x_bar WDF
# u WDF
```

### # Simulation

```
X_i     = rep(NaN,ns)
X_bar   = rep(NaN,ns)
S_sqr   = rep(NaN,ns)
U       = rep(NaN,ns)
```

```
# X_1 Array
# \bar{X} Array
# S^2 Array
# U Array
```

```
for(s in 1:ns){
  X      = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))
  X_i[s] = X[1]
  X_bar[s] = mean(X)
  S_sqr[s] = var(X)
```

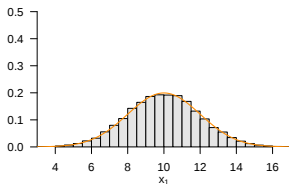
```
# Simulationsiterationen
# Stichprobenrealisierung
# X_i
# Stichprobenmittelrealisierung
# Stichprobenvarianzrealisierung
```

### # U-Statistik Realisation

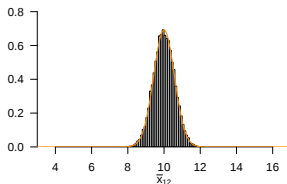
```
U[s]    = ((n-1)/sigsqr)*S_sqr[s]
}
```

## U-Statistik

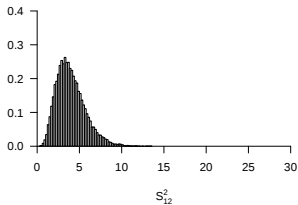
$$X_i \sim N(10, 4), i = 1, \dots, 12$$



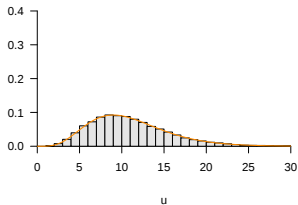
$$\bar{X}_{12} \sim N(10, 1/3)$$



$$S_{12}^2$$



$$U \sim \frac{11}{4} S_{12}^2$$



## Theorem ( $T$ -Statistik)

$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  sei die Stichprobe eines Normalverteilungsmodells,  $\bar{X}_n$  bezeichne das Stichprobenmittel und  $S_n$  bezeichne die Stichprobenstandardabweichung. Dann ist die  $T$ -Statistik

$$T := \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \right) \quad (5)$$

eine  $t$ -verteilte Zufallsvariable mit  $n - 1$  Freiheitsgraden.

## Bemerkungen

- Die WDF einer  $t$ -verteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit  $t$ .
- Ihre KVF und inverse KVF bezeichnen wir mit  $\psi$  und  $\psi^{-1}$ , respektive.

## $T$ -Statistik

### Beweisskizze

Wir halten zunächst fest, dass

$$T = \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \right) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n / \sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sigma} \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n / \sigma} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} S_n^2}} \quad (6)$$

An der rechten Seite obiger Gleichung sehen wir also, dass die  $T$ -Statistik als Quotient der Zufallsvariablen

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \text{ und } \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} S_n^2} \quad (7)$$

geschrieben werden kann. Dabei hat die Zufallsvariable im Zähler die Form der  $Z$ -Statistik, kann also als

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) =: Z \quad (8)$$

geschrieben werden. Die Zufallsvariable im Nenner dagegen hat die Form der Quadratwurzel einer mit  $n - 1$  multiplizierten  $U$ -Statistik, kann also als

$$\sqrt{\frac{1}{\sigma^2} S_n^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2} := \sqrt{\frac{1}{n-1} U} \quad (9)$$

geschrieben werden.

## $T$ -Statistik

### Beweisskizze (fortgeführt)

Insgesamt kann die  $T$  Statistik also als

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n-1}}} \text{ mit } Z \sim N(0, 1) \text{ und } U \sim \chi^2(n-1) \quad (10)$$

geschrieben werden. Casella and Berger (2012, Abschnitt 5.3) zeigen, dass die Zufallsvariablen im Zähler und Nenner dieser Formulierung der  $T$ -Statistik unabhängig sind.

Es ergibt sich also, dass die  $T$ -Statistik **als** Quotient zweier unabhängiger Zufallsvariablen geschrieben werden kann, wobei die Zählerzufallsvariable eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist und die Nennerzufallsvariable die Quadratwurzel einer durch die Anzahl ihrer Freiheitsgrade **geteilten**  $\chi^2$ -**verteilten** Zufallsvariable ist.

Dann aber folgt mit dem  $T$ -Transformationstheorem (cf. (6) Transformationen der Normalverteilung), dass die  $T$ -Statistik eine  $t$ -verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgraden entsprechend den Freiheitsgraden der  $\chi^2$ -verteilten Zufallsvariable, hier also  $n-1$ , ist. Es folgt demnach  $T \sim t(n-1)$ .



## T-Statistik

### # Modellformulierung

```
mu      = 10
sigsqr  = 4
n       = 12
ns      = 1e4
res     = 1e3
```

```
# w.a.u. Erwartungswertparameter
# wahrer bekannter Varianzparameter
# Stichprobengroesse
# Anzahl Stichprobenrealisierungen
# Ausgangsraumaufloesung
```

### # analytische Definitionen und Resultate

```
x_i     = seq(3,17,len = res)
x_bar   = seq(3,17,len = res)
u       = seq(0,30,len = res)
t       = seq(-4,4,len = res)
p_x_i   = dnorm(x_i,mu,sqrt(sigsqr))
p_x_bar = dnorm(x_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))
p_u     = dchisq(u,n-1)
p_t     = dt(t,n-1)
```

```
# x_1 Raum
# x_bar Raum
# normalized s_{12}^2 Raum
# t Raum
# x_1 WDF
# x_bar WDF
# u WDF
# t WDF
```

### # Simulation

```
X_i     = rep(NaN,ns)
X_bar   = rep(NaN,ns)
U       = rep(NaN,ns)
Tee     = rep(NaN,ns)
for(s in 1:ns){
  X      = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))
  X_i[s] = X[1]
  X_bar[s] = mean(X)
  U[s]    = (n-1)/(sigsqr)*var(X)
```

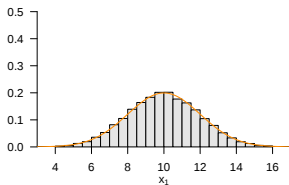
```
# X_1 Array
# \bar{X} Array
# U Array
# T Array
# Simulationsiterationen
# Stichprobenrealisierung
# X_i
# Stichprobenmittelrealisierung
# U Statistik Realisierung
```

### # T-Statistik Realisierung

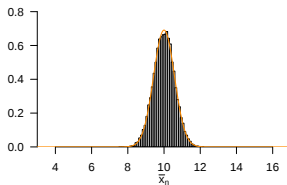
```
Tee[s] = sqrt(n)*((X_bar[s] - mu)/sqrt(var(X)))
}
```

## T-Statistik

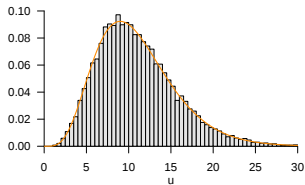
$$X_i \sim N(10, 4), i = 1, \dots, 12$$



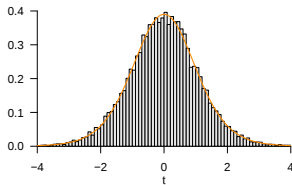
$$\bar{X}_n \sim N(10, 1/3)$$



$$U \sim \chi^2(11)$$



$$T \sim t(11)$$



## Standardstatistiken und Konfidenzintervalle

- Standardstatistiken
- **Definition von Konfidenzintervallen**
- Konfidenzintervallbeispiele
- Selbstkontrollfragen

### Definition ( $\delta$ -Konfidenzintervall ( $\delta$ -KI))

Es sei  $X = X_1, \dots, X_n \sim p_\theta$  eine Stichprobe,  $\delta \in ]0, 1[$ , und  $b_l(X)$  und  $b_u(X)$  seien zwei Statistiken. Dann ist ein  $\delta$ -Konfidenzintervall ein Intervall der Form  $C_n := [b_l, b_u]$ , so dass

$$\mathbb{P}_\theta(C_n \ni \theta) = \mathbb{P}_\theta(b_l(X) \leq \theta \leq b_u(X)) = \delta \text{ für alle } \theta \in \Theta \text{ gilt.} \quad (11)$$

$\delta$  heißt das *Konfidenzniveau* oder die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* des Konfidenzintervalls. Die Statistiken  $b_l(X)$  und  $b_u(X)$  sind die unteren und oberen Grenzen des Konfidenzintervalls.

### Bemerkungen

- $\theta$  ist fest, nicht zufällig, und unbekannt.
- $C_n$  ist ein zufälliges Intervall, weil  $b_l(X)$  und  $b_u(X)$  Zufallsvariablen sind.
- $C_n \ni \theta$  bedeutet  $\theta \in C_n$ , aber  $C_n$  ist zufällig und steht deshalb vorn (cf.  $\mathbb{P}(X = x)$ ).
- Ein  $\delta$ -Konfidenzintervall überdeckt den wahren Wert  $\theta$  mit Wahrscheinlichkeit  $\delta$ .
- Oft wird  $\delta = 0.95$  gewählt, also 95%-Konfidenzintervalle betrachtet.

### Zwei Interpretationen von $\delta$ -Konfidenzintervallen

- (1) Wird ein Experiment unter gleichen Umständen häufig wiederholt, so überdeckt das zugehörige  $\delta$ -Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert in  $\delta \cdot 100\%$  der Fälle. Technischer ausgedrückt, für unabhängig gezogene Stichproben einer Verteilung mit wahren, aber unbekannten, Parameter  $\theta$  überdeckt ein entsprechendes  $\delta$ -Konfidenzintervall  $\theta$  in  $\delta \cdot 100\%$  aller Fälle.
- (2) Man betrachte eine Folge von Experimenten mit wahren, aber unbekannten, Parametern  $\theta_1, \theta_2, \dots$  und stelle sich vor  $\delta$ -Konfidenzintervalle für eben jene Folge von wahren, aber unbekannten Parametern  $\theta_1, \theta_2, \dots$  zu konstruieren. Dann überdecken  $\delta \cdot 100\%$  der Konfidenzintervalle den wahren, aber unbekannten, Wert  $\theta_i, i = 1, 2, \dots$ .

## Definition (Pivot)

Ein *Pivot* ist eine Funktion einer Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  (also eine Statistik) und eines wahren, aber unbekannten, Parameters  $\theta$ , deren Verteilung nicht von  $\theta$  abhängt.

## Bemerkungen

- Ein Pivot ist eine Statistik, die vom wahren, aber unbekannten Parameter  $\theta$  abhängt, deren Verteilung aber nicht von vom wahren, aber unbekannten Parameter  $\theta$  abhängt.
- Mithilfe von Pivots kann man Konfidenzintervalle für alle Werte von  $\theta$  konstruieren.

Die typische Konstruktion eines Konfidenzintervalls umfasst

- (1) Definition eines statistischen Modells
- (2) Definition einer Statistik und Analyse ihrer Verteilung
- (3) Verifikation der Konfidenzbedingung
- (4) Definition des Konfidenzintervalls

## Beispiele für die Konstruktion von Konfidenzintervallen

Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

Varianz einer Normalverteilung

## Beispiele für die Konstruktion von Konfidenzintervallen

Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

Varianz einer Normalverteilung

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

### (1) Statistisches Modell

Es sei  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  eine Stichprobe, wobei  $\mu$  unbekannt sei und  $\sigma^2 > 0$  bekannt sei. Wir entwickeln ein  $\delta$ -Konfidenzintervall für  $\mu$ .

### (2) Statistik und ihre Verteilung

Wir betrachten die Statistik

$$Z := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu). \quad (12)$$

Wir haben bereits gesehen, dass  $Z \sim N(0, 1)$ .  $Z$  ist eine Funktion der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  (via  $\bar{X}_n$ ) und  $\mu$ , während die Verteilung von  $Z$  nicht von  $\mu$  abhängt. Die Statistik  $Z$  ist also ein exaktes Pivot.

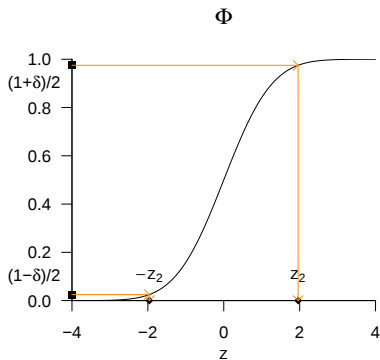
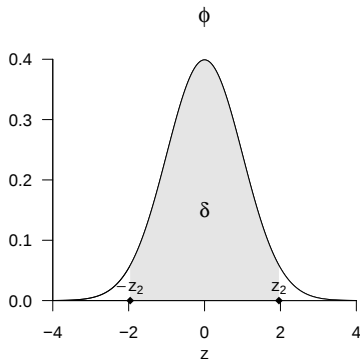
### (3) Konfidenzbedingung

Für  $\delta \in ]0, 1[$ , seien  $z_1 := \Phi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}\right)$  und  $z_2 := \Phi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}\right)$  die entsprechenden Quantile von  $N(0, 1)$ . Es gilt  $(1 + \delta)/2 - (1 - \delta)/2 = \delta$ . Zum Beispiel gilt für  $\delta = 0.95$ , dass  $z_1 = \Phi^{-1}(0.025) = -1.96$  und  $z_2 = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ . Weiterhin gilt mit der Symmetrie von  $N(0, 1)$ ,  $z_1 = -z_2$ . Es gilt also per definitionem  $\mathbb{P}(-z_2 \leq Z \leq z_2) = \delta$ .

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

### (3) Konfidenzbedingung (fortgeführt)

$$\mathbb{P}(-z_2 \leq Z \leq z_2) = \delta$$



### Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

#### (3) Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Damit folgt

$$\begin{aligned}\delta &= \mathbb{P}(-z_2 \leq Z \leq z_2) \\&= \mathbb{P}\left(-z_2 \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq z_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \leq \bar{X}_n - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(-\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \leq -\mu \leq -\bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \geq \mu \geq \bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2 \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(\left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_2\right] \ni \mu\right).\end{aligned}\tag{13}$$

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

### (4) Definition des Konfidenzintervalls

Es sei  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  eine Stichprobe bei bekanntem Varianzparameter  $\sigma^2$  und unbekanntem Erwartungswertparameter  $\mu$ , es sei  $\delta \in ]0, 1[$ , und es sei  $z_\delta := \Phi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}\right)$ . Definiere

$$C_n := \left[ \bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\delta, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\delta \right]. \quad (14)$$

Dann gilt wie oben gezeigt, dass

$$\mathbb{P}(C_n \ni \mu) = \delta. \quad (15)$$

Damit ist  $C_n$  ein  $\delta$ -Konfidenzintervall für  $\mu$ . Weil  $\bar{X}_n$  eine Zufallsvariable ist, ist  $C_n$  ein zufälliges Intervall.

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

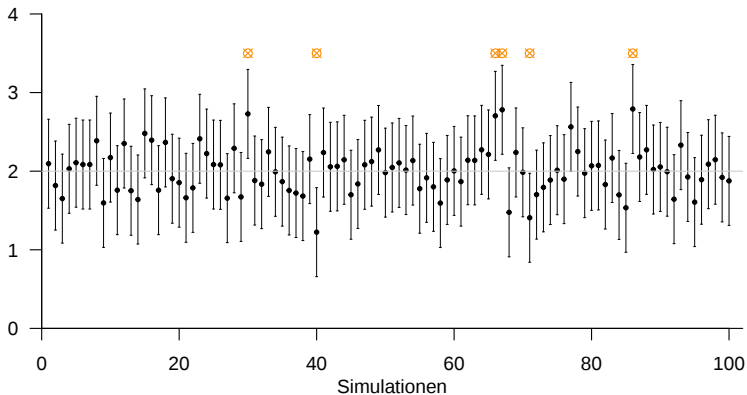
```
# Modellformulierung
mu      = 2                                # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                     # w.a.u. St. Abweichungsparameter
n        = 12                              # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                             # Konfidenzbedingung
phi_inv = qnorm((1+delta)/2)               # \Phi^{-1}((\delta + 1)/2)

# Simulation
ns       = 1e2                             # Anzahl Simulationen
X_bar    = rep(NaN, ns)                     # Stichprobenmittelarray
C        = matrix(rep(NaN, 2*ns), ncol = 2) # Konfidenzintervallarray

for(i in 1:ns){
  X      = rnorm(n, mu, sigma)              # Stichprobenrealisierung
  X_bar[i] = mean(X)                       # Stichprobenmittel
  C[i,1] = X_bar[i] - (sigma/sqrt(n))*phi_inv # untere KI Grenze
  C[i,2] = X_bar[i] + (sigma/sqrt(n))*phi_inv # obere KI Grenze
}
```

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

$$\mu = 2, \sigma^2 = 2, n = 12, \delta = 0.95$$



## Beispiele für die Konstruktion von Konfidenzintervallen

Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

Varianz einer Normalverteilung

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

### 1. Statistisches Modell

Es sei  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  eine Stichprobe, wobei  $\mu$  und  $\sigma^2 > 0$  unbekannt seien. Wir entwickeln ein  $\delta$ -Konfidenzintervall für  $\mu$ .

### 2. Statistik und ihre Verteilung

Wir betrachten die Statistik

$$T := \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{X}_n - \mu) \text{ mit } S_n := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}. \quad (16)$$

Wir haben bereits gesehen, dass  $T \sim t(n-1)$ .  $T$  ist eine Funktion der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  (via  $\bar{X}_n$  und  $S_n$ ) während die Verteilung von  $T$  weder von  $\mu$  noch von  $\sigma^2$  abhängt. Die  $T$  Statistik ist also ein exaktes Pivot.

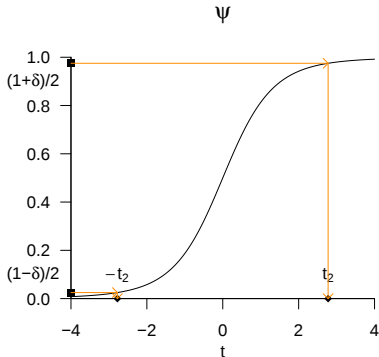
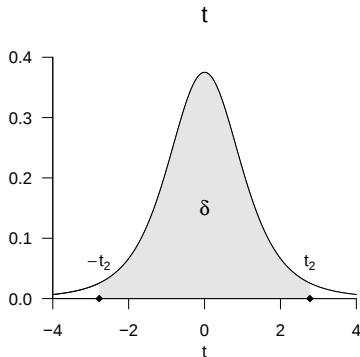
### 3. Konfidenzbedingung

Für  $\delta \in ]0, 1[$  seien  $t_1 := \psi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right)$  und  $t_2 := \psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right)$  die entsprechenden Quantile von  $t(n-1)$ , so dass  $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$  gilt. Zum Beispiel gilt für  $n=5$  und  $\delta=0.95$ ,  $t_1 = \psi^{-1}(0.025; 4) = -2.57$  und  $t_2 = \psi^{-1}(0.975; 4) = 2.57$ . Weiterhin gilt mit der Symmetrie von  $t(n-1)$ ,  $t_1 = -t_2$ . Es gilt also per definitionem  $\mathbb{P}(-t_2 \leq T \leq t_2) = \delta$ .

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

### (3) Konfidenzbedingung (fortgeführt)

$$\mathbb{P}(-t_2 \leq T \leq t_2) = \delta, n = 12$$



## Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

### 3. Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Damit folgt

$$\begin{aligned}\delta &= \mathbb{P}(-t_2 \leq T \leq t_2) \\&= \mathbb{P}\left(-t_2 \leq \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{X}_n - \mu) \leq t_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \leq \bar{X}_n - \mu \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(-\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \leq -\mu \leq -\bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \geq \mu \geq \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(\left[\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right] \ni \mu\right).\end{aligned}\tag{17}$$

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

### 4. Definition des Konfidenzintervalls

Es sei  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  mit unbekannten Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$ , es sei  $\delta \in ]0, 1[$ , und es sei  $t_\delta := \psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right)$ . Definiere

$$C_n := \left[ \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta, \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta \right]. \quad (18)$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(C_n \ni \mu) = \delta. \quad (19)$$

Damit ist  $C_n$  ein  $\delta$ -Konfidenzintervall für  $\mu$ . Weil  $\bar{X}_n$  und  $S_n$  Zufallsvariablen sind, ist  $C_n$  ein zufälliges Intervall.

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

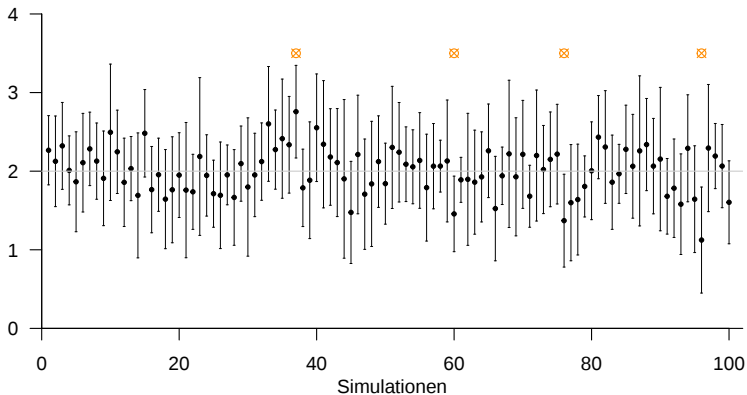
```
# Modellformulierung
mu      = 2                                # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                     # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n        = 12                              # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                             # Konfidenzbedingung
psi_inv = qt((1+delta)/2,n-1)              # \psi^{-1}((\delta + 1)/2, n-1)

# Simulation
ns       = 1e2                             # Anzahl Simulationen
X_bar    = rep(NaN, ns)                    # Stichprobenmittelarray
S        = rep(NaN, ns)                    # St.Abweichungsarray
C        = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2) # Konfidenzintervallarray

for(i in 1:ns){
  X      = rnorm(n,mu,sigma)               # Stichprobenrealisierung
  X_bar[i] = mean(X)                       # Stichprobenmittel
  S[i]    = sd(X)                           # Stichprobenstandardabweichung
  C[i,1]  = X_bar[i] - (S[i]/sqrt(n))*psi_inv # untere KI Grenze
  C[i,2]  = X_bar[i] + (S[i]/sqrt(n))*psi_inv # obere KI Grenze
}
```

## Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

$$\mu = 2, \sigma^2 = 2, n = 12, \delta = 0.95$$



## Beispiele für die Konstruktion von Konfidenzintervallen

Erwartungswert einer Normalverteilung mit bekannter Varianz

Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz

Varianz einer Normalverteilung

## Varianz einer Normalverteilung

### 1. Statistisches Modell

Es sei  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter  $\sigma^2 > 0$  und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparameter  $\mu$ . Wir entwickeln ein  $\delta$ -Konfidenzintervall für  $\sigma^2$ .

### 2. Statistik und ihre Verteilung

Wir betrachten die Statistik

$$U := \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2, \text{ wobei } S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2. \quad (20)$$

Wir haben bereits gesehen, dass  $U \sim \chi^2(n-1)$ .  $U$  ist eine Funktion von  $X_1, \dots, X_n$  (via  $S_n^2$ ) und  $\sigma^2$ , während die Verteilung von  $U$  nicht von  $\sigma^2$  abhängt.  $U$  ist also ein exaktes Pivot.

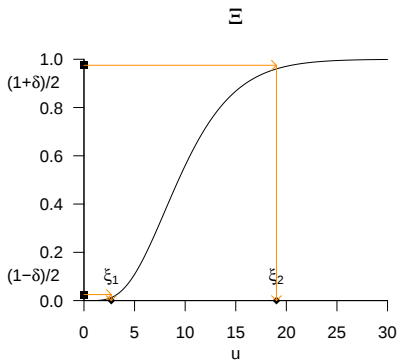
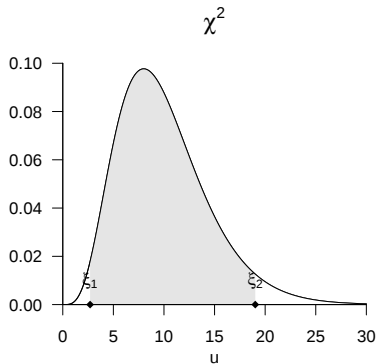
### 3. Konfidenzbedingung

Für  $\delta \in ]0, 1[$  seien  $\xi_1 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right)$  und  $\xi_2 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right)$  die entsprechenden Quantile von  $\chi^2(n-1)$ , so dass  $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$  gilt. Zum Beispiel gilt für  $n = 10$  und  $\delta = 0.95$ ,  $\xi_1 := \Xi^{2^{-1}}(0.025; 9) = 2.70$  und  $\xi_2 := \Xi^{2^{-1}}(0.975; 9) = 19.0$ . Es gilt also per definitionem  $\mathbb{P}(\xi_1 \leq U \leq \xi_2) = \delta$ .

## Varianz einer Normalverteilung

### (3) Konfidenzbedingung (fortgeführt)

$$\mathbb{P}(\xi_1 \leq U \leq \xi_2) = \delta, n = 12$$



## Varianz einer Normalverteilung

### 3. Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Damit folgt

$$\begin{aligned}\delta &= \mathbb{P}(\xi_1 \leq U \leq \xi_2) \\&= \mathbb{P}\left(\xi_1 \leq \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \leq \xi_2\right) \\&= \mathbb{P}\left(\xi_1^{-1} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1)S_n^2} \geq \xi_2^{-1}\right) \\&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}\right) \\&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1}\right) \\&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1}\right] \ni \sigma^2\right).\end{aligned}\tag{21}$$

## Varianz einer Normalverteilung

### 4. Definition des Konfidenzintervalls

Es sei  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter  $\sigma^2$  und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparameter  $\mu$ , und es seien weiterhin  $\delta \in ]0, 1[$ ,  $\xi_1 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right)$  und  $\xi_2 := \Xi^{2^{-1}}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right)$ . Definiere

$$C_n := \left[ \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1} \right]. \quad (22)$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(C_n \ni \sigma^2) = \delta. \quad (23)$$

Damit ist  $C_n$  ein  $\delta$ -Konfidenzintervall für  $\sigma^2$ . Weil  $S_n^2$  eine Zufallsvariable ist, ist  $C_n$  ein zufälliges Intervall.

## Varianz einer Normalverteilung

### # Modellformulierung

```
mu      = 2                                # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 2                                # w.a.u. Varianzparameter
n       = 12                                # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                              # Konfidenzbedingung
xi_1    = qchisq((1-delta)/2, n - 1)        # \(\chi^2_{(1-\delta)/2; n-1}\)
xi_2    = qchisq((1+delta)/2, n - 1)        # \(\chi^2_{(1+\delta)/2; n-1}\)
```

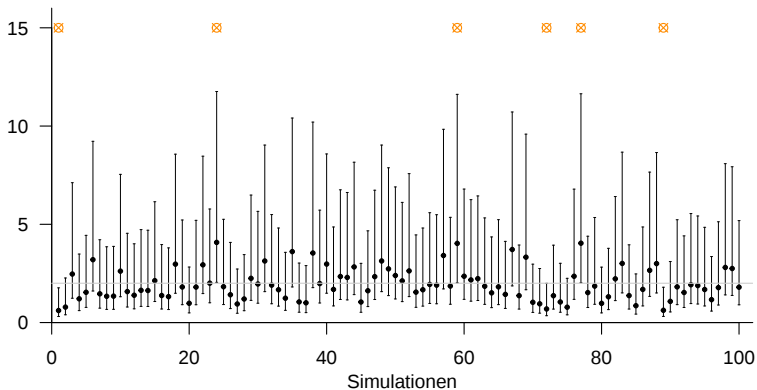
### # Simulation

```
ns      = 1e2                                # Anzahl Simulationen
X_bar   = rep(NaN, ns)                       # Stichprobenmittelarray
S2      = rep(NaN, ns)                       # Stichprobenvarianzarray
C       = matrix(rep(NaN, 2*ns), ncol = 2)   # Konfidenzintervallarray

for(i in 1:ns){
  X      = rnorm(n, mu, sqrt(sigsqr))        # Stichprobenrealisierung
  S2[i]  = var(X)                            # Stichprobenvarianz
  C[i,1] = (n-1)*S2[i]/xi_2                  # untere KI Grenze
  C[i,2] = (n-1)*S2[i]/xi_1                  # obere KI Grenze
}
```

## Varianz einer Normalverteilung

$$\mu = 2, \sigma^2 = 2, n = 12, \delta = 0.95$$



## Anwendungsbeispiel

### Beck Depressions-Inventar II (BDI II)

| VP | BDI II $\Sigma$ | Modellannahmen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 11              | Wir legen das Normalverteilungsmodell zugrunde, d.h. wir nehmen an, dass die BDI II $\Sigma$ Werte Realisierungen von u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{12} \sim N(\mu, \sigma^2)$ sind. Dies entspricht der Annahme, dass sich der BDI II $\Sigma$ Wert einer VP durch Addition einer normalverteilten Fehlervariable mit Erwartungswertparameter 0 und Varianzparameter $\sigma^2$ zu dem über VP identischen Wert $\mu$ ergibt. |
| 2  | 14              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 3  | 10              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 4  | 9               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 5  | 8               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 6  | 17              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 7  | 3               | <b>Fragestellungen</b><br><br>(1) Was sind sinnvolle Tipps für die wahren, aber unbekannten, Parameterwerte $\mu$ und $\sigma^2$ ?<br><br>(2) Wie hoch ist im frequentistischen Sinne die mit diesen Tipps assoziierte Unsicherheit?<br><br>(3) Entscheiden wir uns sinnvollerweise für die Hypothese, dass $\mu \leq 8$ ist oder dass $\mu > 8$ ist?                                                                                    |
| 8  | 20              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 9  | 13              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 10 | 3               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 11 | 6               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 12 | 2               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

## Anwendungsbeispiel

### Beck Depressions-Inventar II (BDI II)

#### Fragestellungen

- (1) Was sind sinnvolle Tipps für die wahren, aber unbekannten, Parameterwerte  $\mu$  und  $\sigma^2$ ?

Im Sinne einer erwartungstreuen Schätzung sind sinnvolle Tipps durch das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz, also durch

$$\bar{x}_{12} = 9.\bar{6} \text{ und } s_{12}^2 = 32.4\bar{2}$$

gegeben.

- (2) Wie hoch ist im frequentistischen Sinne die mit diesen Tipps assoziierte Unsicherheit?

Die 95%-Konfidenzintervalle dieser Tipps ergeben sich für  $\mu$  zu

$$\left[ \bar{x}_{12} - \frac{s_{12}}{\sqrt{12}} \psi^{-1} \left( \frac{1+0.95}{2}; 11 \right), \bar{x}_{12} + \frac{s_{12}}{\sqrt{12}} \psi^{-1} \left( \frac{1+0.95}{2}; 11 \right) \right] \approx [6.04, 13.28]$$

und für  $\sigma^2$  zu

$$\left[ 11s_n^2/\Xi^{2^{-1}} \left( \frac{1+0.95}{2}; 11 \right), 11s_n^2/\Xi^{2^{-1}} \left( \frac{1-0.95}{2}; 11 \right) \right] \approx [16.27, 93.47]$$

## Anwendungsbeispiel

### Beck Depressions-Inventar II (BDI II)

#### Fragestellungen

- (1) Was sind sinnvolle Tipps für die wahren, aber unbekannten, Parameterwerte  $\mu$  und  $\sigma^2$ ?
- (2) Wie hoch ist im frequentistischen Sinne die mit diesen Tipps assoziierte Unsicherheit?

```
# Daten- und Analysedefinitionen
x      = c(11,14,10,9,8,17,3,20,13,3,6,2)      # BDI Datensatz
n      = length(x)                             # Stichprobengroesse
delta  = 0.95                                  # Konfidenzniveau

# Stichprobenstatistiken
x_bar  = mean(x)                               # Stichprobenmittel
s2     = var(x)                                # Stichprobenvarianz
s      = sd(x)                                 # Stichprobenstandardabweichung

# 95% Prozent KI fuer \mu
C_m_u  = x_bar - (s/sqrt(n))*qt((1+delta)/2, n - 1) # untere KI Grenze
C_m_o  = x_bar + (s/sqrt(n))*qt((1+delta)/2, n - 1) # obere KI Grenze

# 95% KI fuer \sigma^2
C_s_u  = (n-1)*s2/qchisq((1+delta)/2, n - 1)      # untere KI Grenze
C_s_o  = (n-1)*s2/qchisq((1-delta)/2, n - 1)      # obere KI Grenze
```

## Alternative Visualisierung von Konfidenzintervallen (Georgii, 2009, Kapitel 8)

- Man beachte, dass hier die Notation  $\vartheta = \theta$ ,  $P_{\vartheta} = \mathbb{P}_{\theta}$ ,  $\delta = 1 - \alpha$  benutzt wird.

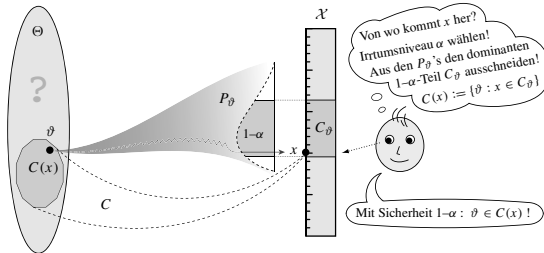


Abbildung 8.2: Schätzen mit Irrtumsangabe: Eine unbekannte Größe  $\vartheta$  soll ermittelt werden; das tatsächlich vorliegende  $\vartheta$  bestimmt ein Zufallsgesetz  $P_{\vartheta}$ , welches im konkreten Fall zum Messwert  $x$  führt. Der Statistiker muss zunächst für jedes  $\vartheta$  das Zufallsgesetz  $P_{\vartheta}$  analysieren und dann, zu vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ , eine möglichst kleine Menge  $C_{\vartheta} \subset \mathcal{X}$  bestimmen mit  $P_{\vartheta}(C_{\vartheta}) \geq 1 - \alpha$ . Damit kann er eine Menge  $C(x) \subset \Theta$  angeben, in der  $\vartheta$  mit Sicherheit von mindestens  $1 - \alpha$  liegt – ganz egal, welches  $\vartheta$  wirklich vorliegt.

## Konfidenzintervalle

- Definition von Konfidenzintervallen
- Exakte Konfidenzintervalle
- Approximative Konfidenzintervalle
- **Selbstkontrollfragen**

1. Definieren Sie die  $Z$ -Statistik und geben Sie ihre Verteilung an.
2. Definieren Sie die  $U$ -Statistik und geben Sie ihre Verteilung an.
3. Definieren Sie die  $T$ -Statistik und geben Sie ihre Verteilung an.
4. Definieren Sie den Begriff des  $\delta$ -Konfidenzintervalls ( $\delta$ -KIs).
5. Geben Sie zwei Interpretationen eines  $\delta$ -KIs.
6. Erläutern Sie den Begriff des Pivots.
7. Erläutern Sie die typischen Schritte zur Konstruktion eines  $\delta$ -KIs.
8. Geben Sie das  $\delta$ -KI für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei bekannter Varianz an.
9. Geben Sie das  $\delta$ -KI für den Erwartungswert einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz an.
10. Geben Sie das  $\delta$ -KI für den Varianzparameter einer Normalverteilung an.

## Literatur

Casella, G. and Berger, R. (2012). *Statistical Inference*. Duxbury.

Georgii, H.-O. (2009). *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. De-Gruyter-Lehrbuch. de Gruyter, Berlin, 4., überarb. und erw. aufl edition.

Held, L. (2008). *Methoden Der Statistischen Inferenz*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Moeschlin, O. (2000). *Angewandte Statistik*.

Wasserman, L. (2004). *All of Statistics*.