



# Inferenzstatistik

BSc Psychologie SoSe 2021

Prof. Dr. Dirk Ostwald

---

## (4) Erwartungswert und Kovarianz

---

## Literaturhinweise

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Konzepte gehören zum Standard der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Lektüre von Georgii (2009, Abschnitte 4.1 und 4.3) wird empfohlen. In englischer Sprache finden sich entsprechende Darstellungen in Wasserman (2004, Sections 3.1 - 3.3) und DeGroot and Schervish (2012, Sections 4.1 - 4.3, 4.6). Die angegebenen Beweise für den Erwartungswert und die Varianz der univariaten Normalverteilung wenden sich an interessierte Leser:innen und sollten beim ersten Durcharbeiten übergangen werden.

## Erwartungswert und Kovarianz

- Erwartungswert
- Varianz und Standardabweichung
- Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung
- Kovarianz und Korrelation
- Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation
- Selbstkontrollfragen

## Erwartungswert und Kovarianz

- **Erwartungswert**
- Varianz und Standardabweichung
- Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung
- Kovarianz und Korrelation
- Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation
- Selbstkontrollfragen

## Definition (Erwartungswert)

Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  sei eine Zufallsvariable. Dann ist der *Erwartungswert von  $X$*  definiert als

- $\mathbb{E}(X) := \sum_{x \in \mathcal{X}} x p_X(x)$ , wenn  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$  diskret mit WMF  $p_X$  ist, und als
- $\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$ , wenn  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kontinuierlich mit WDF  $p_X$  ist.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable heißt *existent*, wenn er endlich ist.

## Bemerkungen

- Der Erwartungswert ist eine skalare Zusammenfassung einer Verteilung.
- Intuitiv ist  $\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  für eine große Zahl  $n$  von Kopien  $X_i$  von  $X$ .

## Beispiel (Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable)

Es sei  $X \sim \text{Bern}(\mu)$ . Dann gilt  $\mathbb{E}(X) = \mu$ .

### Beweis

$X$  ist diskret mit  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ . Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in \{0,1\}} x \text{Bern}(x; \mu) \\ &= 0 \cdot \mu^0 (1 - \mu)^{1-0} + 1 \cdot \mu^1 (1 - \mu)^{1-1} \\ &= 1 \cdot \mu^1 (1 - \mu)^0 \\ &= \mu.\end{aligned}\tag{1}$$

□

## Beispiel (Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariable)

Es sei  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Dann gilt  $\mathbb{E}(X) = \mu$ .

### Beweis

Wir halten zunächst ohne Beweis fest, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}. \quad (2)$$

Mit der Definition des Erwartungswerts für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) dx. \quad (3)$$

Mit der Substitutionsregel

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx \quad (4)$$

und der Definition von

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := \sqrt{2\sigma^2}x + \mu \text{ with } g'(x) = \sqrt{2\sigma^2}, \quad (5)$$

gilt dann

## Beispiel (Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariable)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((\sqrt{2\sigma^2}x + \mu) - \mu\right)^2\right) \sqrt{2\sigma^2} dx \\&= \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu) \exp(-x^2) dx \\&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-x^2) dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right) \\&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-x^2) dx + \mu\sqrt{\pi} \right)\end{aligned}\tag{6}$$

Eine Stammfunktion von  $x \exp(-x^2)$  ist  $-\frac{1}{2} \exp(-x^2)$ . Mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(-x^2) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x^2) = 0\tag{7}$$

verschwindet der Integralterm und wir erhalten

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\mu\sqrt{\pi}) = \mu.\tag{8}$$

□

## Theorem (Eigenschaften des Erwartungswerts)

(1) (Linear-affine Transformation) Für eine Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b. \quad (9)$$

(2) (Linearkombination) Für Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i). \quad (10)$$

(3) (Faktorisierung bei Unabhängigkeit) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i). \quad (11)$$

## Bemerkung

- Die genannten Eigenschaften sind oft nützlich zur Berechnung von Erwartungswerten.

## Beweis

Eigenschaft (1) folgt aus den Linearitätseigenschaften von Summen und Integralen. Wir betrachten den Fall einer kontinuierlichen Zufallsvariable  $X$  mit WDF  $p_X$  genauer. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(aX + b) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)p_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} axp_X(x) + bp_X(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx \\ &= a\mathbb{E}(X) + b.\end{aligned}\tag{12}$$

Eigenschaft (2) folgt ebenfalls aus den Linearitätseigenschaften von Summen und Integralen. Wir betrachten den Fall von zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  mit bivariater WDF  $p_{X_1, X_2}$  genauer. In diesem Fall gilt

## Beweis (fortgeführt)

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^2 a_i X_i \right) \\ &= \mathbb{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (a_1 x_1 + a_2 x_2) p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} a_1 x_1 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) + a_2 x_2 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= a_1 \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + a_2 \iint_{\mathbb{R}^2} x_2 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left( \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_{X_1}(x_1) dx_1 + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p_{X_2}(x_2) dx_2 \\ &= a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 a_i \mathbb{E}(X_i). \end{aligned} \tag{13}$$

Ein Induktionsargument erlaubt dann die Generalisierung vom bivariaten zum  $n$ -variaten Fall.

# Erwartungswert

## Beweis (fortgeführt)

Zu Eigenschaft (3) betrachten wir den Fall von  $n$  kontinuierlichen Zufallsvariablen mit gemeinsamer WDF  $p_{X_1, \dots, X_n}$ . Weil als  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig vorausgesetzt sind, gilt

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i). \quad (14)$$

Weiterhin gilt also

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n x_i \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n x_i p_{X_i}(x_i) dx_1 \dots dx_n \quad (15) \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_i p_{X_i}(x_i) dx_i \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i). \end{aligned}$$

□

## Erwartungswert und Kovarianz

- Erwartungswert
- **Varianz und Standardabweichung**
- Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung
- Kovarianz und Korrelation
- Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation
- Selbstkontrollfragen

## Definition (Varianz und Standardabweichung)

Es sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mathbb{E}(X)$ . Die *Varianz von  $X$*  ist definiert als

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2), \quad (16)$$

unter der Annahme, dass dieser Erwartungswert existiert. Die *Standardabweichung von  $X$*  ist definiert

$$\mathbb{S}(X) := \sqrt{\mathbb{V}(X)}. \quad (17)$$

## Bemerkungen

- Die Varianz misst die Streuung (Breite) einer Verteilung.
- Quadration ist nötig wegen  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$ .
- Ein alternatives Maß für die Streuung einer Verteilung ist  $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$ .
- Ein weiteres Maß für die Streuung einer Verteilung ist die Entropie  $-\mathbb{E}(\ln p_X(X))$ .

## Beispiel (Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable)

Es sei  $X \sim \text{Bern}(\mu)$ . Dann ist die Varianz von  $X$  gegeben durch

$$\mathbb{V}(X) = \mu(1 - \mu). \quad (18)$$

### Beweis

$X$  ist eine diskrete Zufallsvariable und es gilt  $\mathbb{E}(X) = \mu$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mu)^2\right) \\ &= \sum_{x \in \{0,1\}} (x - \mu)^2 \text{Bern}(x; \mu) \\ &= (0 - \mu)^2 \mu^0 (1 - \mu)^{1-0} + (1 - \mu)^2 \mu^1 (1 - \mu)^{1-1} \\ &= \mu^2 (1 - \mu) + (1 - \mu)^2 \mu \\ &= \left(\mu^2 + (1 - \mu)\mu\right) (1 - \mu) \\ &= \left(\mu^2 + \mu - \mu^2\right) (1 - \mu) \\ &= \mu(1 - \mu). \end{aligned} \quad (19)$$

□

## Theorem (Varianzverschiebungssatz)

Es sei  $X$  eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \quad (20)$$

### Beweis

Mit der Definition der Varianz und der Linearität des Erwartungswerts gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

□

### Bemerkung

- Das Theorem ist nützlich, wenn  $\mathbb{E}(X^2)$  und  $\mathbb{E}(X)$  leicht zu berechnen sind.

Beispiel (Varianz einer normalverteilten Zufallsvariable)

Es sei  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Dann gilt  $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ .

## Beweis

Wir halten zunächst fest, dass mit dem Varianzverschiebungssatz gilt, dass

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) dx - \mu^2 \quad (22)$$

Mit der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx \quad (23)$$

und der Definition von

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2\sigma^2}x + \mu, g(-\infty) := -\infty, g(\infty) := \infty, \text{ with } g'(x) = \sqrt{2\sigma^2}, \quad (24)$$

kann das Integral auf der rechten Seite von Gleichung (22) dann als

## Beweis (fortgeführt)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}((\sqrt{2\sigma^2}x + \mu) - \mu)^2\right) \sqrt{2\sigma^2} dx \\ &= \sqrt{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu)^2 \exp\left(-\frac{2\sigma^2 x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \sqrt{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu)^2 \exp(-x^2) dx. \end{aligned} \tag{25}$$

geschrieben werden. Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x + \mu)^2 \exp(-x^2) dx - \mu^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}x)^2 + 2\sqrt{2\sigma^2}x\mu + \mu^2 \exp(-x^2) dx - \mu^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx + 2\sqrt{2\sigma^2}\mu \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-x^2) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right) - \mu^2 \end{aligned} \tag{26}$$

## Beweis (fortgeführt)

Wir halten weiterhin ohne Beweis fest, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-x^2) dx = 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}. \quad (27)$$

Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx + \mu^2 \sqrt{\pi} \right) - \mu^2 \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx + \mu^2 - \mu^2 \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \end{aligned} \quad (28)$$

Mit der partiellen Integrationsregel

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx \quad (29)$$

und der Definition von

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \exp(-x^2) \text{ with } f'(x) = -2 \exp(-x^2) \quad (30)$$

Beweis (fortgeführt)

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) := -\frac{1}{2}x \text{ with } g'(x) = -\frac{1}{2}, \quad (31)$$

so dass

$$f'(x)g(x) = -2 \exp(-x^2) \left(-\frac{1}{2}x\right) = x^2 \exp(-x^2), \quad (32)$$

gilt, ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2) dx \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left( -\frac{1}{2}x \exp(-x^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \left(-\frac{1}{2}\right) dx \right) \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left( -\frac{1}{2}x \exp(-x^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right), \end{aligned} \quad (33)$$

Aus  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(-x^2) = 0$  schließen wir, dass der erste Term in den Klammern auf der rechten Seite der obigen Gleichung gleich 0 ist. Schließlich ergibt sich

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \sigma^2. \quad (34)$$

□

## Theorem (Eigenschaften der Varianz)

(1) (Linear-affine Transformation) Für eine Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gelten

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X) \text{ und } \mathbb{S}(aX + b) = |a|\mathbb{S}(X). \quad (35)$$

(2) (Linearkombination bei Unabhängigkeit) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(X_i). \quad (36)$$

## Beweis

Um Eigenschaft (1) zu zeigen, definieren wir zunächst  $Y := aX + b$  und halten fest, dass  $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$ . Für die Varianz von  $Y$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((aX - a\mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((a(X - \mathbb{E}(X)))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= a^2\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) \\ &= a^2\mathbb{V}(X)\end{aligned}\tag{37}$$

Wurzelziehen ergibt dann das Resultat für die Standardabweichung.

Für Eigenschaft (2) betrachten wir den Fall zweier unabhängiger Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  genauer. Wir halten zunächst fest, dass in diesem Fall gilt, dass

$$\mathbb{E}(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1\mathbb{E}(X_1) + a_2\mathbb{E}(X_2).\tag{38}$$

### Beweis (fortgeführt)

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} & \mathbb{V} \left( \sum_{i=1}^2 a_i X_i \right) \\ &= \mathbb{V}(a_1 X_1 + a_2 X_2) \\ &= \mathbb{E} \left( (a_1 X_1 + a_2 X_2 - \mathbb{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (a_1 X_1 + a_2 X_2 - a_1 \mathbb{E}(X_1) - a_2 \mathbb{E}(X_2))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (a_1 X_1 - a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 X_2 - a_2 \mathbb{E}(X_2))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( ((a_1 (X_1 - \mathbb{E}(X_1)) + (a_2 (X_2 - \mathbb{E}(X_2))))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (a_1 (X_1 - \mathbb{E}(X_1)))^2 - 2(a_1 (X_1 - \mathbb{E}(X_1))(a_2 (X_2 - \mathbb{E}(X_2))) + (a_2 (X_2 - \mathbb{E}(X_2)))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (a_1^2 (X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 - 2a_1 a_2 (X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2)) + a_2^2 (X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2 \right) \\ &= a_1^2 \mathbb{E} \left( (X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 \right) - 2a_1 a_2 \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) + a_2^2 \mathbb{E} \left( (X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2 \right) \\ &= a_1^2 \mathbb{V}(X_1) - 2a_1 a_2 \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) + a_2^2 \mathbb{V}(X_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 a_i^2 \mathbb{V}(X_i) - 2a_1 a_2 \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) \end{aligned}$$

## Beweis (fortgeführt)

Weil  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig sind, ergibt sich mit den Eigenschaften des Erwartungswerts für unabhängige Zufallsvariablen, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) &= \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))) \mathbb{E}((X_2 - \mathbb{E}(X_2))) \\ &= (\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1))(\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_2)) \\ &= 0\end{aligned}\tag{39}$$

ist. Damit folgt also

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^2 a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^2 a_i^2 \mathbb{V}(X_i).\tag{40}$$

Ein Induktionsargument erlaubt dann die Generalisierung vom bivariaten zum  $n$ -variaten Fall.

□

## Erwartungswert und Kovarianz

- Erwartungswert
- Varianz und Standardabweichung
- **Stichprobenmittel, -varianz, -standardabweichung**
- Kovarianz und Korrelation
- Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation
- Selbstkontrollfragen

## Definition (Stichprobenmittel, -varianz, -standardabweichung)

$X_1, \dots, X_n$  seien Zufallsvariablen.

- Das *Stichprobenmittel* von  $X_1, \dots, X_n$  ist definiert als der arithmetische Mittelwert

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (41)$$

- Die *Stichprobenvarianz* von  $X_1, \dots, X_n$  ist definiert als

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2. \quad (42)$$

- Die *Stichprobenstandardabweichung* ist definiert als

$$S_n := \sqrt{S_n^2}. \quad (43)$$

## Bemerkungen

- $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{V}(X)$ , und  $\mathbb{S}(X)$  sind Kennzahlen einer Zufallsvariable  $X$ .
- $\bar{X}_n$ ,  $S_n^2$ , und  $S_n$  sind Kennzahlen einer Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ .
- $\bar{X}_n$ ,  $S_n^2$ , und  $S_n$  sind Zufallsvariablen, ihre Realisationen werden mit  $\bar{x}_n$ ,  $s_n^2$ , und  $s_n$  bezeichnet.

## Beispiel (Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung)

- Es seien  $X_1, \dots, X_{10} \sim N(1, 2)$ .
- Wir nehmen die folgenden Realisationen an

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 0.54  | 1.01  | -3.28 | 0.35  | 2.75  | -0.51 | 2.32  | 1.49  | 0.96  | 1.25     |

- Die Stichprobenmittelrealisation ist

$$\bar{x}_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{6.88}{10} = 0.68. \quad (44)$$

- Die Stichprobenvarianzrealisation ist

$$s_{10}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}_{10})^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 0.68)^2 = \frac{25.37}{9} = 2.82. \quad (45)$$

- Die Stichprobenstandardabweichungrealisation ist

$$s_{10} = \sqrt{s_{10}^2} = \sqrt{2.82} = 1.68. \quad (46)$$

## Erwartungswert und Kovarianz

- Erwartungswert
- Varianz und Standardabweichung
- Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung
- **Kovarianz und Korrelation**
- Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation
- Selbstkontrollfragen

## Definition (Kovarianz und Korrelation)

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist definiert als

$$\mathbb{C}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))). \quad (47)$$

Die *Korrelation* zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist definiert als

$$\rho(X, Y) := \frac{\mathbb{C}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} = \frac{\mathbb{C}(X, Y)}{\mathbb{S}(X)\mathbb{S}(Y)}. \quad (48)$$

### Bemerkungen

- Die Kovarianz von  $X$  mit sich selbst ist die Varianz von  $X$ ,

$$\mathbb{C}(X, X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{V}(X). \quad (49)$$

- $\rho(X, Y)$  wird auch *Korrelationskoeffizient* von  $X$  und  $Y$  genannt.
- Wenn  $\rho(X, Y) = 0$  ist, werden  $X$  und  $Y$  *unkorreliert* genannt.
- Wir zeigen später mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung, dass  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ .

## Beispiel (Kovarianz und Korrelation zweier diskreter Zufallsvariablen)

Es sei  $X := (X_1, X_2)$  ein Zufallsvektor mit WMF  $p_{X_1, X_2}$  definiert durch (Lange and Mosler, 2017)

| $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ | $x_2 = 1$ | $x_2 = 2$ | $x_2 = 3$ | $p_{X_1}(x_1)$ |
|--------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| $x_1 = 1$                | 0.10      | 0.05      | 0.15      | 0.30           |
| $x_1 = 2$                | 0.60      | 0.05      | 0.05      | 0.70           |
| $p_{X_2}(x_2)$           | 0.70      | 0.10      | 0.20      |                |

$X_1, X_2$  sind also zwei Zufallsvariablen mit einer definierten bivariaten Verteilung. Um  $\mathbb{C}(X_1, X_2)$  und  $\rho(X_1, X_2)$  zu berechnen, halten wir zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{x_1=1}^2 x_1 p_{X_1}(x_1) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.7 \quad (50)$$

und

$$\mathbb{E}(X_2) = \sum_{x_2=1}^3 x_2 p_{X_2}(x_2) = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 = 1.5. \quad (51)$$

Mit der Definition der Kovarianz von  $X_1$  und  $X_2$ , gilt dann

$$\begin{aligned}C(X_1, X_2) &= \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))) \\&= \sum_{x_1=1}^2 \sum_{x_2=1}^3 (x_1 - \mathbb{E}(X_1))(x_2 - \mathbb{E}(X_2))p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\&= \sum_{x_1=1}^2 \sum_{x_2=1}^3 (x_1 - 1.7)(x_2 - 1.5)p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\&= \sum_{x_1=1}^2 (x_1 - 1.7)(1 - 1.5)p_{X_1, X_2}(x_1, 1) \\&\quad + (x_1 - 1.7)(2 - 1.5)p_{X_1, X_2}(x_1, 2) \\&\quad + (x_1 - 1.7)(3 - 1.5)p_{X_1, X_2}(x_1, 3) \\&= (1 - 1.7)(1 - 1.5)p_{X_1, X_2}(1, 1) + (1 - 1.7)(2 - 1.5)p_{X_1, X_2}(1, 2) + (1 - 1.7)(3 - 1.5)p_{X_1, X_2}(1, 3) \\&\quad + (2 - 1.7)(1 - 1.5)p_{X_1, X_2}(2, 1) + (2 - 1.7)(2 - 1.5)p_{X_1, X_2}(2, 2) + (2 - 1.7)(3 - 1.5)p_{X_1, X_2}(2, 3) \\&= (-0.7) \cdot (-0.5) \cdot 0.10 \quad + (-0.7) \cdot 0.5 \cdot 0.05 \quad + (-0.7) \cdot 1.5 \cdot 0.15 \\&\quad + 0.3 \cdot (-0.5) \cdot 0.60 \quad + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.05 \quad + 0.3 \cdot 1.5 \cdot 0.05 \\&= 0.035 - 0.0175 - 0.1575 - 0.09 + 0.0075 + 0.0225 \\&= -0.2.\end{aligned}$$

## Theorem (Kovarianzverschiebungssatz)

$X$  und  $Y$  seien Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \quad (52)$$

### Beweis

Mit der Definition der Kovarianz gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \end{aligned} \quad (53)$$

□

### Bemerkungen

- Das Theorem ist nützlich, wenn  $\mathbb{E}(XY)$ ,  $\mathbb{E}(X)$ , und  $\mathbb{E}(Y)$  leicht zu berechnen sind.
- Für  $Y = X$  erhalten wir  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .

## Theorem (Korrelation und Unabhängigkeit)

$X$  und  $Y$  seien zwei Zufallsvariablen. Wenn  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, dann ist  $\mathbb{C}(X, Y) = 0$  und  $X$  und  $Y$  sind unkorreliert. Ist dagegen  $\mathbb{C}(X, Y) = 0$  und sind  $X$  und  $Y$  somit unkorreliert, dann sind  $X$  und  $Y$  nicht notwendigerweise unabhängig.

### Beweis

Wir zeigen zunächst, dass aus der Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$   $\mathbb{C}(X, Y) = 0$  folgt. Hierzu halten wir zunächst fest, dass für unabhängige Zufallsvariablen gilt, dass

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \quad (54)$$

Mit dem Kovarianzverschiebungssatz folgt dann

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0. \quad (55)$$

Mit der Definition des Korrelationskoeffizienten folgt dann unmittelbar, dass  $\rho(X, Y) = 0$  und  $X$  und  $Y$  somit unkorreliert sind.

## Beweis (fortgeführt)

Wir zeigen nun durch Angabe eines Beispiels, dass die Kovarianz von abhängigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  null sein kann. Zu diesem Zweck betrachten wir den Fall zweier diskreter Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit Ergebnisräumen  $\mathcal{X} = \{-1, 0, 1\}$  und  $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ , marginaler WMF von  $X$  gegeben durch  $p_X(X = x) = 1/3$  für  $x \in \mathcal{X}$  und der Definition  $Y := X^2$ . Wir halten dann zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} xp_X(X = x) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad (56)$$

und

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(XX^2) = \mathbb{E}(X^3) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x^3 p_X(X = x) = -1^3 \cdot \frac{1}{3} + 0^3 \cdot \frac{1}{3} + 1^3 \cdot \frac{1}{3} = 0. \quad (57)$$

Mit dem Kovarianzverschiebungssatz ergibt sich dann

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 - 0 \cdot \mathbb{E}(Y) = 0. \quad (58)$$

Die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  ist also null. Wie unten gezeigt faktorisiert die gemeinsame WMF von  $X$  und  $Y$  jedoch nicht, und somit sind  $X$  und  $Y$  nicht unabhängig.

## Beweis (fortgeführt)

Die Definition of  $Y := X^2$  impliziert die folgende bedingte WMF

| $p_{Y X}(y x)$ | $x = -1$ | $x = 0$ | $x = 1$ |
|----------------|----------|---------|---------|
| $y = 0$        | 0        | 1       | 0       |
| $y = 1$        | 1        | 0       | 1       |

Die marginale WMF  $p_X$  und die bedingte WMF  $p_{Y|X}$  implizieren die gemeinsame WMF

| $p_{X,Y}(x,y)$ | $x = -1$ | $x = 0$ | $x = 1$ | $p_Y(y)$ |
|----------------|----------|---------|---------|----------|
| $y = 0$        | 0        | 1/3     | 0       | 1/3      |
| $y = 1$        | 1/3      | 0       | 1/3     | 2/3      |
| $p_X(x)$       | 1/3      | 1/3     | 1/3     |          |

Es gilt also zum Beispiel

$$p_{X,Y}(x = -1, y = 0) = 0 \neq \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = p_X(x = -1)p_Y(y = 0) \quad (59)$$

und damit sind  $X$  und  $Y$  nicht unabhängig.

□

## Theorem (Varianzen von Summen und Differenzen von Zufallsvariablen)

$X$  und  $Y$  seien zwei Zufallsvariablen und es seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\mathbb{V}(aX + bY + c) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\mathbb{C}(X, Y). \quad (60)$$

Speziell gelten

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X, Y) \quad (61)$$

und

$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\mathbb{C}(X, Y) \quad (62)$$

## Bemerkungen

- Varianzen von Zufallsvariablen addieren sich nicht einfach.
- Die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen hängt von ihrer Kovarianz ab.

## Beweis

Wir halten zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c. \quad (63)$$

Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}(aX + bY + c) \\ &= \mathbb{E} \left( (aX + bY + c - a\mathbb{E}(X) - b\mathbb{E}(Y) - c)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( (a(X - \mathbb{E}(X)) + b(Y - \mathbb{E}(Y)))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( a^2(X - \mathbb{E}(X))^2 + b^2(Y - \mathbb{E}(Y))^2 + 2ab(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \right) \\ &= a^2\mathbb{E} \left( (X - \mathbb{E}(X))^2 \right) + b^2\mathbb{E} \left( (Y - \mathbb{E}(Y))^2 \right) + 2ab\mathbb{E} \left( (X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \right) \\ &= a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\mathbb{C}(X, Y) \end{aligned} \quad (64)$$

Die Spezialfälle folgen dann direkt mit  $a := b := 1$  und  $a := 1, b := -1$ , respektive.

□

## Erwartungswert und Kovarianz

- Erwartungswert
- Varianz und Standardabweichung
- Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung
- Kovarianz und Korrelation
- **Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation**
- Selbstkontrollfragen

## Definition (Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation)

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  seien zweidimensionale Zufallsvektoren.

- Das Stichprobenmittel der  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  ist definiert als

$$\overline{(X, Y)}_n := (\bar{X}_n, \bar{Y}_n) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right). \quad (65)$$

- Die Stichprobenkovarianz der  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  ist definiert als

$$C_n := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n). \quad (66)$$

- Der Stichprobenkorrelationskoeffizient der  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  ist definiert als

$$R_n := \frac{C_n}{S_{X,n} S_{Y,n}}, \quad (67)$$

wobei  $S_{X,n}$  und  $S_{Y,n}$  die Stichprobenstandardabweichungen von  $X_1, \dots, X_n$  und  $Y_1, \dots, Y_n$ , bezeichnen.

## Bemerkungen

- $\overline{(X, Y)}_n$ ,  $C_n$ , und  $R_n$  sind Zufallsvariablen
- $\overline{(x, y)}_n$ ,  $c_n$ , und  $r_n$  bezeichnen ihre Realisierungen

## Beispiel (Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation)

- Es seien  $(X_1, Y_1), \dots, (X_{10}, Y_{10})$  zweidimensionale Zufallsvariablen.
- Wir nehmen folgende Realisierungen an

|              |              |              |              |              |              |              |              |              |                    |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
| $(x_1, y_1)$ | $(x_2, y_2)$ | $(x_3, y_3)$ | $(x_4, y_4)$ | $(x_5, y_5)$ | $(x_6, y_6)$ | $(x_7, y_7)$ | $(x_8, y_8)$ | $(x_9, y_9)$ | $(x_{10}, y_{10})$ |
| (0.8, -0.7)  | (1.1, 1.6)   | (-0.8, 1.1)  | (-0.2, 0.1)  | (1.1, 0.4)   | (0.5, 1.5)   | (1.3, -1.2)  | (1.8, 0.6)   | (0.4, 0.2)   | (1.5, -1.0)        |

- Die Stichprobenmittelrealisation ergibt sich zu

$$\overline{(x, y)}_{10} = \left( \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i, \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i \right) = (0.75, 0.26). \quad (68)$$

- Die Stichprobenstandardabweichungrealisationen ergeben sich zu

$$s_{X,n} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}_{10})^2} = 0.79 \text{ und } s_{Y,n} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y}_{10})^2} = 0.99. \quad (69)$$

- Die Stichprobenkovarianz- und Stichprobenkorrelationsrealisationen ergeben sich zu

$$c_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n) = -0.26 \text{ und } r_n = \frac{c_n}{s_{x,n} s_{y,n}} = -0.33. \quad (70)$$

## Erwartungswert und Kovarianz

- Erwartungswert
- Varianz und Standardabweichung
- Stichprobenmittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenstandardabweichung
- Kovarianz und Korrelation
- Stichprobenkovarianz und Stichprobenkorrelation
- **Selbstkontrollfragen**

1. Definieren und interpretieren Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable.
3. Nennen Sie die Linearitäts- und Multiplikationseigenschaften des Erwartungswerts.
4. Definieren und interpretieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.
5. Drücken Sie  $\mathbb{E}(X^2)$  mithilfe der Varianz und des Erwartungswerts von  $X$  aus.
6. Was ist  $\mathbb{V}(aX)$  für konstantes  $a \in \mathbb{R}$ ?
7. Definieren Sie die Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .
8. Schreiben Sie die Kovarianz zweier Zufallsvariablen mithilfe ihrer Erwartungswerte.
9. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bei Unabhängigkeit?
10. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  im Allgemeinen?

11. Gegeben seien folgende Realisationen von Zufallsvektoren  $(X_1, Y_1), \dots, (X_5, Y_5)$ :

| $(x_1, y_1)$ | $(x_2, y_2)$ | $(x_3, y_3)$ | $(x_4, y_4)$ | $(x_5, y_5)$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (5.2, 4.1)   | (-1.1, -0.8) | (2.7, 2.1)   | (-3.2, -2.8) | (0.1, -0.2)  |

Berechnen Sie bitte mithilfe eines Taschenrechners das Stichprobenmittel, die Stichprobenvarianz, und die Stichprobenstandardabweichung der Realisationen von  $X_1, \dots, X_5$ , das Stichprobenmittel, die Stichprobenvarianz, und die Stichprobenstandardabweichung der Realisationen von  $Y_1, \dots, Y_5$ , und die Stichprobenkovarianz und die Stichprobenkorrelation der Realisationen von  $(X_1, Y_1), \dots, (X_5, Y_5)$ . Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe der R Funktionen `mean()`, `var()`, `sd()`, `cov()`, und `cor()`.

## Literatur

- DeGroot, M. H. and Schervish, M. J. (2012). *Probability and Statistics*. Addison-Wesley, Boston, 4th ed edition.
- Georgii, H.-O. (2009). *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. DeGruyter-Lehrbuch. de Gruyter, Berlin, 4., überarb. und erw. aufl edition.
- Lange, T. and Mosler, K. (2017). *Statistik kompakt*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Wasserman, L. (2004). *All of Statistics*.