Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(7) Transformationen der Normalverteilung

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

Selbstkontrollfragen

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

Selbstkontrollfragen

Realisierungen von Zufallsvariablen

Der einzelne Wert, den eine Zufallsvariable bei jedem Durchgang eines Zufallsvorgangs annimmt, heißt eine *Realisierung der Zufallsvariable*. Mithilfe eines Computers lassen sich Zufallsexperimente simulieren und Realisierungen von Zufallsvariablen erhalten.

Realisierungen von normalverteilten Zufallsvariablen erhält man in R mit `rnorm()`, wobei die Syntax für Realisierungen von n unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen $\xi_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, ..., n$ durch `rnorm(n,mu,sigma)` gegeben ist.

```r
rnorm(1,0,1)                    # \xi_i \sim N(0,1)
```

```
[1] -0.915625
```

```r
rnorm(1,10,1)                   # \xi_i \sim N(10,1)
```

```
[1] 9.099382
```

```r
rnorm(3,5,sqrt(2))              # \xi_i \sim N(5,2), i = 1,2,3 (u.i.v.)
```

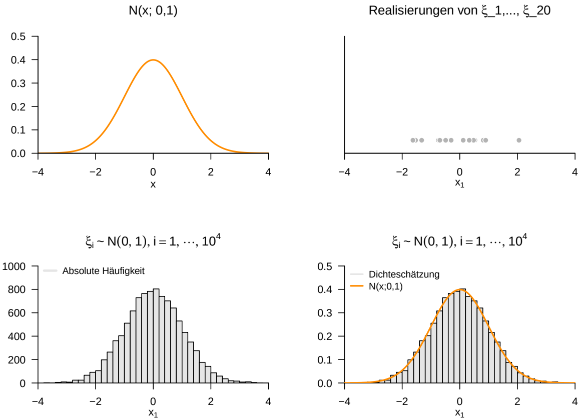
```
[1] 2.580926 4.424935 3.292730
```

```r
rnorm(1e1,5,sqrt(2))            # \xi_i \sim N(5,2), i = 1,...,10 (u.i.v.)
```

```
 [1] 3.607981 5.815495 6.229038 2.896216 5.565196 6.618827 2.494256 3.603984
 [9] 4.800696 5.106866
```

Realisierungen von Zufallsvariablen

Die empirische Verteilung unabhängig und identisch simulierter Zufallsvariablenrealisationen entspricht der Verteilung der Zufallsvariable. Die empirische Verteilung stellt man mit Histogrammen (Häufigkeitsverteilungen) oder histogramm-basierten Dichteschätzern dar.



Transformation von Zufallsvariablen

Inhalt dieser Vorlesungseinheit sind einige Gesetzmäßigkeiten zur Transformation von normalverteilten Zufallsvariablen. Mit *Transformation* ist hier die Anwendung einer Funktion auf Zufallsvariablen sowie die arithmetische Verknüpfung mehrerer Zufallsvariablen gemeint. Die zentrale Fragestellung dabei ist folgende: "Wenn die Zufallsvariable ξ normalverteilt ist, wie ist dann eine Zufallsvariable υ, die sich durch Transformation von ξ ergibt, verteilt?"

Für die in dieser Vorlesungseinheit behandelten Fälle gilt, dass man explizit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die Verteilung der transformierten Zufallsvariable angeben kann. Diese gehören zu den klassischen Resultaten der frequentistischen Inferenz und sind für das Verständnis von Konfidenzintervallen, Hypothesentests, und Varianzanalysen essentiell.

Intuitiv kann man sich die Transformation einer Zufallsvariable anhand der Transformation ihrer u.i.v. Realisierungen klar machen. Betrachtet man z.B. $\xi \sim N(0,1)$ und ihre Transformation $\upsilon := \xi^2$ und sind

$$x_1 = 0.10,\ x_2 = -0.20,\ x_3 = 0.80 \tag{1}$$

drei u.i.v. Realisierungen von ξ, so entspricht dies den u.i.v. Realisierungen

$$y_1 = x_1^2 = 0.01,\ y_2 = x_2^2 = 0.04,\ y_3 = x_3^2 = 0.64 \tag{2}$$

von υ. In diesem Beispiel fällt auf, dass υ keine negativen Werte annimmt, die Verteilung von υ ordnet negativen Werten daher Wahrscheinlichkeitsdichten von 0 zu.

Simulation der Transformation normalverteilter Zufallsvariablen in R

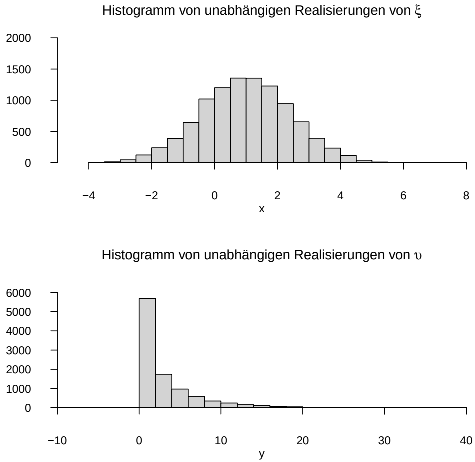
```
# Simulationsspezifikation
n       = 1e4                         # Anzahl von u.i.v Realisierungen (ZVen)
mu      = 1                           # Erwartungswertparameter von \xi
sigsqr  = 2                           # Varianzparameter von \xi

# Quadrieren einer Zufallsvariable
x       = rnorm(n, mu, sqrt(sigsqr))  # Realisierungen x_i, i = 1,....,n von \xi
y       = x^2                         # Realisierungen y_i = x_i^2 von \ups

# Ausgabe der ersten acht Werte
print(x[1:8], digits = 2)
```

```
[1] -0.173  0.109  1.108  2.652  1.947  0.382  2.903  0.049
```

```
print(y[1:8], digits = 2)
```

```
[1] 0.0301 0.0120 1.2285 7.0314 3.7896 0.1460 8.4266 0.0024
```

Simulation der Transformation normalverteilter Zufallsvariablen in R



Theorem (Transformation eines Zufallsvektors)

$\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ sei ein Zufallsvektor und $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$ sei eine multivariate vektorwertige Funktion. Dann ist

$$\upsilon : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \upsilon(\omega) := (f \circ \xi)(\omega) := f(\xi(\omega)) \tag{3}$$

ein Zufallsvektor.

Bemerkungen

- Das Theorem formalisiert die oben etablierte Intuition, dass die Anwendung einer (deterministischen) Funktion auf eine zufällige Größe im Allgemeinen wieder eine zufällige Größe ergibt. Wir verzichten auf einen Beweis.
- In einem Beweis müsste die Messbarkeit von υ als Folge der Messbarkeit von ξ nachgewiesen werden.
- Im Folgenden ist oft $\mathcal{X} := \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Wir schreiben in diesem Fall in der Regel einfach $\upsilon := f(\xi)$ und nennen υ die *transformierte Zufallsvariable*.

Überblick

Im Abschnitt *Transformationstheoreme* stellen wir zunächst einige generelle Werkzeuge zum Berechnen der WDFen von transformierten Zufallsvariablen bereit. Diese Werkzeuge sind von der allgemeinen Form "Wenn ξ eine Zufallsvariable mit WDF p_ξ und $\upsilon := f(\xi)$ die durch f transformierte Zufallsvariable ist, dann gilt für die WDF von υ die folgende Formel: $p_\upsilon := \{\text{Formel}\}$".

Im Abschnitt *Standardtransformationen* diskutieren wir sechs Standardtransformationen normalverteilter Zufallsvariablen, die in der frequentistischen Inferenz und damit im weiteren Verlauf des Kurses zentrale Rollen spielen. Diese Aussagen sind von der allgemeinen Form "Wenn $\xi_i, i = 1, ..., n$ unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen sind und $\upsilon := f(\xi_1, ..., \xi_n)$ eine Transformation dieser Zufallsvariablen ist, dann ist die WDF von υ durch die Formel $p_\upsilon := \{\text{Formel}\}$ gegeben und man nennt die Verteilung von υ *Verteilungsname*".

Die Aussagen im Abschnitt Standardtransformationen sind für die Frequentistische Inferenz zentral, weil

(1) die Zentralen Grenzwertsätze die Annahme additiv unabhängig normalverteilter Störvariablen rechtfertigt,

(2) wir sehen werden, dass Schätzer und Statistiken Transformationen von Zufallsvariablen sind, und

(3) Parameterschätzergütekritieren, Konfidenzintervalle und Hypothesentests durch die Verteilungen der ihnen jeweils zugrundeliegenden Schätzer und Statistiken charakterisiert und begründet werden.

Ausblick

Das probabilistische Standardmodell von n Datenpunkten hat die Form

$$\upsilon_i := \mu_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., n. \tag{4}$$

Die Zufallsvariable υ_i dient dabei als das Modell des $i$ten Datenpunktes $y_i \in \mathbb{R}$, d.h. y_i wird als Realisierung von υ_i modelliert. Die Normalverteilung $\upsilon_i \sim N(\mu_i, \varepsilon)$ der Zufallsvariable υ_i ergibt sich dabei wie wir später sehen werden aus der linear-affinen Transformation der Zufallsvariable ε_i unter der Abbildung $f(\varepsilon_i) := \mu_i + \varepsilon_i$

$\mu_i \in \mathbb{R}$ repräsentiert den deterministischen Aspekt des Datenpunktmodells und liefert die theoretische Erklärung für den Wert von υ_i. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ dagegen repräsentiert den stochastischen Aspekt des Datenpunktmodells und liefert im Sinne der Zentralen Grenzwertsätzte die theoretischer Erklärung für die Differenz von μ_i und υ_i als Resultat der Addition vieler weiterer Einflüsse in der Generation von υ_i über μ_i hinaus.

Statistiken und Schätzer, also Funktionen von $\upsilon_i, i = 1, ..., n$, entsprechen damit im probabilistischen Standardmodell Transformationen von normalverteilten Zufallsvariablen.

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

Selbstkontrollfragen

Überblick

Das *univariate WDF Transformationstheorem bei bijektiven Abbildungen* liefert eine Formel zur Berechnung der WDF p_υ von $\upsilon := f(\xi)$, wenn ξ eine Zufallsvariable mit WDF p_ξ ist und f eine bijektive Funktion ist.

Das *univariate WDF Transformationstheorem bei linear affiner Abbildung* gibt eine Formel zur Berechnung der WDF p_υ von $\upsilon := f(\xi)$ an, wenn ξ eine Zufallsvariable mit WDF p_ξ ist und f eine linear-affine Funktion ist.

Das *univariate WDF Transformationstheorem bei stückweisen bijektiven Abbildungen* gibt eine Formel zur Berechnung der WDF p_υ von $\upsilon := f(\xi)$ an, wenn ξ eine Zufallsvariable mit WDF p_ξ ist und f zumindest in Teilen bijektiv ist.

Das *multivariate WDF Transformationstheorem bei bijektiven Abbildungen* liefert eine Formel zur Berechnung der WDF p_υ von $\upsilon := f(\xi)$, wenn ξ ein Zufallsvektor mit WDF p_ξ ist und f eine bijektive multivariate vektorwertige-Funktion ist.

Das *Faltungstheorem* liefert eine Formel zur Berechnung der WDF p_υ von $\upsilon := \xi_1 + \xi_2$, wenn ξ_1 und ξ_2 zwei Zufallsvariablen mit WDFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2} sind.

Theorem (Univariate WDF Transformation bei bijektiven Abbildungen)

ξ sei eine Zufallsvariable mit WDF p_ξ für die $\mathbb{P}(]a,b[) = 1$ gilt, wobei a und/oder b entweder endlich oder unendlich seien. Weiterhin sei

$$\upsilon := f(\xi) \tag{5}$$

wobei die univariate reellwertige Funktion $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und bijektiv auf $]a,b[$ sei. $f(]a,b[)$ sei das Bild von $]a,b[$ unter f. Schließlich sei $f^{-1}(y)$ der Wert der Umkehrunktion von $f(x)$ für $y \in f(]a,b[)$ und $f'(x)$ sei die Ableitung von f an der Stelle x. Dann ist die WDF von υ gegeben durch

$$p_\upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_\upsilon(y) := \begin{cases} \frac{1}{|f'\left(f^{-1}(y)\right)|} p_\xi\left(f^{-1}(y)\right) & \text{für } y \in f(]a,b[) \\ 0 & \text{für } y \in \mathbb{R} \setminus f(]a,b[). \end{cases} \tag{6}$$

Bemerkungen

- Linear-affine Abbildungen sind ein wichtiger Anwendungsfalls.
- Die Z-Transformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.

Transformationstheoreme

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass weil f eine differenzierbare bijektive Funktion auf $]a,b[$ ist, f entweder strikt wachsend oder strikt fallend ist. Nehmen wir zunächst an, dass f auf $]a,b[$ strikt wachsend ist. Dann ist auch f^{-1} für alle $y \in f(]a,b[)$ wachsend, und es gilt

$$P_\upsilon(y) = \mathbb{P}(\upsilon \le y) = \mathbb{P}\left(f(\xi) \le y\right) = \mathbb{P}\left(f^{-1}(f(\xi)) \le f^{-1}(y)\right) = \mathbb{P}\left(\xi \le f^{-1}(y)\right) = P_\xi\left(f^{-1}(y)\right).$$

P_υ ist also differenzierbar an allen Stellen y, an denen sowohl f^{-1} als auch P_ξ differenzierbar sind. Mit der Kettenregel und dem Satz von der Umkehrabbildung $(f^{-1}(x))' = 1/f'(f^{-1}(x))$, folgt dann, dass die WDF p_υ sich ergibt wie folgt:

$$p_\upsilon(y) = \frac{d}{dy}P_\upsilon(y) = \frac{d}{dy}P_\xi\left(f^{-1}(y)\right) = p_\xi\left(f^{-1}(y)\right)\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}p_\xi\left(f^{-1}(y)\right),$$

Weil f^{-1} strikt wachsend ist, ist $d/dy(f^{-1}(y))$ positiv und das Theorem trifft zu. Analog gilt, dass wenn f auf $]a,b[$ strikt fallend ist, dann ist auch f^{-1} für alle $y \in f(]a,b[)$ fallend und es gilt

$$P_\upsilon(y) = \mathbb{P}(f(\xi) \le y) = \mathbb{P}\left(f^{-1}(f(\xi)) \ge f^{-1}(y)\right) = \mathbb{P}\left(\xi \ge f^{-1}(y)\right) = 1 - P_\xi\left(f^{-1}(y)\right),$$

Mit der Kettenregel und dem Satz von der Umkehrabbildung folgt dann

$$p_\upsilon(y) = \frac{d}{dy}(1 - P_\upsilon(y)) = -\frac{d}{dy}P_\xi\left(f^{-1}(y)\right) = -p_\xi\left(f^{-1}(y)\right)\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = -\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}p_\xi\left(f^{-1}(y)\right).$$

Weil f^{-1} strikt fallend ist, ist $d/dy(f^{-1}(y))$ negativ, so dass $-d/dy(f^{-1}(y))$ gleich $|d/dy(f^{-1}(y))|$ ist und das Theorem trifft zu.

Theorem (Univariate WDF Transformation bei linear-affine Abbildung)

ξ sei eine Zufallsvariable mit WDF p_ξ und es sei

$$\upsilon = f(\xi) \text{ mit } f(\xi) := a\xi + b \text{ für } a \neq 0. \tag{7}$$

Dann ist die WDF von υ gegeben durch

$$p_\upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_\upsilon(y) := \frac{1}{|a|} p_\xi \left(\frac{y-b}{a}\right). \tag{8}$$

Bemerkung

- Das Theorem folgt direkt WDF Transformationstheorem bei bijektiven Abbildungen.
- Die Z-Transformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.

Transformationstheoreme

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \tag{9}$$

ist, weil dann $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ gilt, wie man anhand von

$$f(f^{-1}(x)) = a\left(\frac{x-b}{a}\right) + b = x - b + b = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{10}$$

einsieht. Wir halten weiterhin fest, dass

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) = \frac{d}{dx}(ax+b) = a. \tag{11}$$

Also folgt mit dem Theorem zur WDF Transformation bei bijektiven Abbildungen, dass

$$\begin{aligned} p_\upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_\upsilon(y) &= \frac{1}{|f'\left(f^{-1}(y)\right)|} p_\xi\left(f^{-1}(y)\right) \\ &= \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

$\square$

Theorem (WDF Transformation bei stückweise bijektiven Abbildungen)

ξ sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X}$ und WDF p_ξ. Weiterhin sei

$$\upsilon = f(\xi), \tag{13}$$

wobei f so beschaffen sei, dass der Ergebnisraum von ξ in eine endliche Anzahl von Mengen $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_k$ mit einer entsprechenden Anzahl von Mengen $\mathcal{Y}_1 := f(\mathcal{X}_1), ..., \mathcal{Y}_k := f(\mathcal{X}_k)$ im Ergebnisraum $\mathcal{Y}$ von υ partitioniert werden kann (wobei nicht notwendigerweise $\mathcal{Y}_i \cap \mathcal{Y}_j = \emptyset, 1 \le i, j \le k$ gelten muss), so dass die Abbildung f für alle $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_k$ bijektiv ist (d.h. f ist eine *stückweise* bijektive Abbildung). Für $i = 1, ..., k$ bezeichne f_i^{-1} die Umkehrfunktion von f auf $\mathcal{Y}_i$. Schließlich nehmen wir an, dass die Ableitungen f_i' für alle $i = 1, ..., k$ existieren und stetig sind. Dann ist eine WDF von υ durch

$$p_\upsilon : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}_{\ge 0}, y \mapsto p_\upsilon(y) := \sum_{i=1}^k 1_{\mathcal{Y}_i}(y) \frac{1}{|f_i'(f_i^{-1}(y))|} p_\xi\left(f_i^{-1}(y)\right). \tag{14}$$

gegeben.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die χ^2-Transformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.

Theorem (Multivariate WDF Transformation bei bijektiven Abbildungen)

ξ sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^n$ und WDF p_ξ. Weiterhin sei

$$\upsilon := f(\xi), \tag{15}$$

wobei die multivariate vektorwertige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und bijektiv auf $]a, b[$ sei. Schließlich seien

$$J^f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{16}$$

die Jacobi-Matrix von f an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$, $|J^f(x)|$ die Determinante von $J^f(x)$, und es sei $|J^f(x)| \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist eine WDF von υ durch

$$p_\upsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}, y \mapsto p_\upsilon(y) := \begin{cases} \frac{1}{|J^f(f^{-1}(y))|} p_\xi\left(f^{-1}(y)\right) & \text{for } y \in f(\mathbb{R}^n) \\ 0 & \text{for } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{17}$$

gegeben.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Es handelt sich um eine direkte Generalisierung des univariaten Falls.
- Die T-und F-Transformationen sind wichtige Anwendungsfälle.

Theorem (Summe unabhängiger Zufallsvariable, Faltung)

ξ_1 und ξ_2 seien zwei kontinuierliche unabhängige Zufallsvariablen mit WDF p_{ξ_1} und p_{ξ_2}, respektive. $\upsilon := \xi_1 + \xi_2$ sei die Summe von ξ_1 und ξ_2. Dann ergibt sich eine WDF der Verteilung von υ als

$$p_\upsilon(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(y - x_2)p_{\xi_2}(x_2)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(y - x_1)\,dx_1 \quad (18)$$

Die Formel für die WDF p_υ heißt *Faltung* oder *Konvolution* von p_{ξ_1} und p_{ξ_2}.

Bemerkung

- Die Summen- und Mittelwerttransformation sind wichtige Anwendungsfälle.

Beweis

Wir nutzen das multivariate WDF Transformationstheorem für bijektive Abbildungen. Dazu definieren wir zunächst

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto f(x) := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Die inverse Funktion von f ist dann gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto f(z) := \begin{pmatrix} z_1 - x_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

weil dann $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ gilt, wie man anhand von

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

einsieht. Die Jacobimatrix von f ergibt sich zu

$$J^f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

und die Jacobideterminante damit zu $|J^f(x)| = 1$.

Beweis (fortgeführt)

Wir halten weiterhin fest, dass die Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 impliziert, dass

$$p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2) \tag{23}$$

impliziert. Einsetzen und Integration hinsichtlich x_2 ergibt dann ergibt dann für $z \in f(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} p_\zeta(z) &= \frac{1}{|J^f\left(f^{-1}(z)\right)|} p_\xi\left(f^{-1}(z)\right) \\ &= \frac{1}{1} p_{\xi_1,\xi_2}\left(z_1 - x_2, x_2\right) \\ &= p_{\xi_1}(z_1 - x_2)p_{\xi_2}(x_2) \end{aligned} \tag{24}$$

Integration über x_2 ergibt dann eine WDF für die marginale Verteilung von ζ_1

$$p_{\zeta_1}(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(z_1 - x_2)p_{\xi_2}(x_2)\, dx_2 \tag{25}$$

Mit $\zeta_1 = \xi_1 + \xi_2 = \upsilon$ ergibt sich dann die erste Form des Faltungstheorems zu

$$p_\upsilon(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(y - x_2)p_{\xi_2}(x_2)\, dx_2. \tag{26}$$

$\square$

Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

Selbstkontrollfragen

Überblick

Das *Summentransformationstheorem* besagt, dass die Summe unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen wiederum normalverteilt ist und gibt die Parameter dieser Verteilung an.

Das *Mittelwertstransformationstheorem* besagt, dass das Stichprobenmittel unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen wiederum normalverteilt ist und gibt die Parameter dieser Verteilung an.

Das Z*-Transformationstheorem* besagt, dass Subtraktion des Erwartungswertparameters und gleichzeitige Division mit der Wurzel des Varianzsparameters die Verteilung einer normalverteilten Zufallsvariable in eine Standardnormalverteilung transformiert.

Das χ^2*-Transformationstheorem* besagt, dass die Summe quadrierter unabhängiger standardnormalverteilter Zufallsvariablen eine χ^2-verteilte Zufallsvariable ist.

Das T*-Transformationstheorem* besagt, dass die Zufallsvariable, die sich durch Division einer standardnormalverteilten Zufallsvariable durch die Quadratwurzel einer χ^2-verteilten Zufallsvariable geteilt durch ein n, ergibt, eine t-verteilte Zufallsvariable ist.

Das F*-Transformationstheorem* besagt, dass die Zufallsvariable, die sich durch Division zweier χ^2 verteilter Zufallsvariablen, jeweils geteilt durch ihre jeweiligen Freiheitsgradparameter, ergibt eine F-verteilte Zufallsvariable ist.

Theorem (Summe unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen)

Für $i = 1, ..., n$ seien $\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt für die Summe $\upsilon := \sum_{i=1}^n \xi_i$, dass

$$\upsilon \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) \tag{27}$$

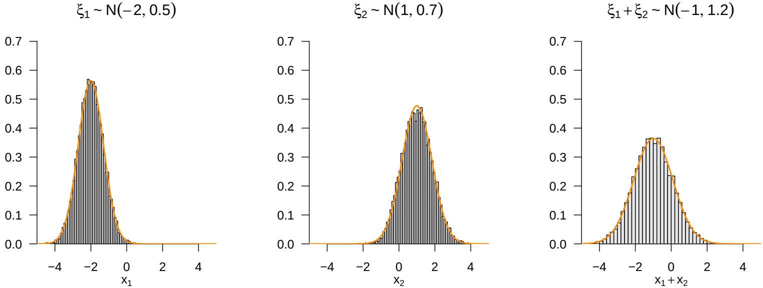
Für unabhängige und identisch normalverteilte Zufallsvariablen $\xi_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt folglich

$$\upsilon \sim N(n\mu, n\sigma^2). \tag{28}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis
- Die Mittelwerttransformation ist ein wichtiger Anwendungsfall.
- Die Generalisierung der zentralen Grenzwertsätze sind wichtige Anwendungsfälle.

Standardtransformationen



Theorem (Stichprobenmittel von u.i.v. normalverteilten Zufallsvariablen)

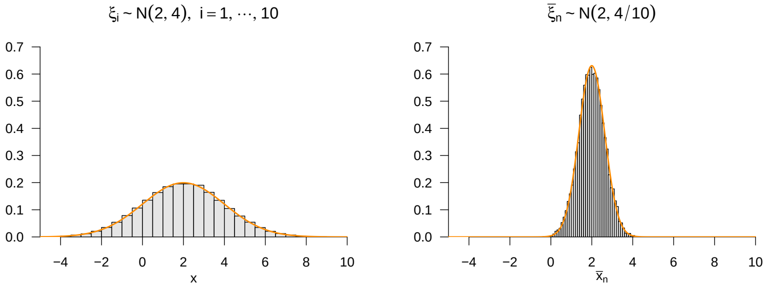
Für $i = 1, ..., n$ seien $\xi_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt für das Stichprobenmittel $\bar{\xi}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i$, dass

$$\bar{\xi}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{29}$$

Bemerkung

- Die Analyse von Erwartungswertschätzern ist ein wichtiger Anwendungsfall.
- Die Generalisierung der zentralen Grenzwertsätze sind wichtige Anwendungsfälle.

Standardtransformationen



Beweis

Wir halten zunächst fest, dass mit dem Theorem zur Summe von unabhängig normalverteilten Zufallsvariablen gilt, dass $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\upsilon$ mit $\upsilon := \sum_{i=1}^n \xi_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$. Einsetzen in das univariate WDF Transformationstheorem für lineare Funktionen ergibt dann

$$
\begin{aligned}
p_{\bar{\xi}_n}(\bar{x}_n) &= \frac{1}{|1/n|} N\left(n\bar{x}_n; n\mu, n\sigma^2\right) \\
&= \frac{n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2}\left(n\bar{x}_n - n\mu\right)^2\right) \\
&= \frac{n}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2n\sigma^2}\left(n\bar{x}_n - n\mu\right)^2\right) \\
&= nn^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(n\bar{x}_n)^2}{2n\sigma^2} + \frac{2(n\bar{x}_n)(n\mu)}{2n\sigma^2} - \frac{(n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right) \\
&= \sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n\bar{x}_n^2}{2\sigma^2} + \frac{2n\bar{x}_n\mu}{2\sigma^2} - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{1/\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\bar{x}_n^2}{2(\sigma^2/n)} + \frac{2\bar{x}_n\mu}{2(\sigma^2/n)} - \frac{\mu^2}{2(\sigma^2/n)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2/n)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma^2/n)}(\bar{x}_n - \mu)^2\right) \\
&= N\left(\bar{x}_n; \mu, \sigma^2/n\right)
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Definition (z-Zufallsvariable)

Z sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, z \mapsto p(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right). \tag{31}$$

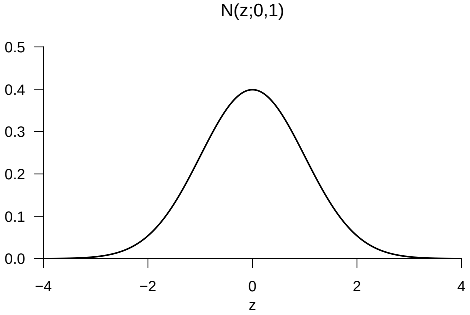
Dann sagen wir, dass Z einer *z-Verteilung (oder Standardnormalverteilung)* unterliegt und nennen Z eine *z-Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $Z \sim N(0, 1)$ ab. Die WDF einer z-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$N(z; 0, 1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right). \tag{32}$$

Bemerkung

- Eine z-Zufallsvariable ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu := 0$ und $\sigma^2 := 1$.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer z-Zufallsvariable



Theorem (Z-Transformation)

Es sei $\upsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable. Dann ist die Zufallsvariable

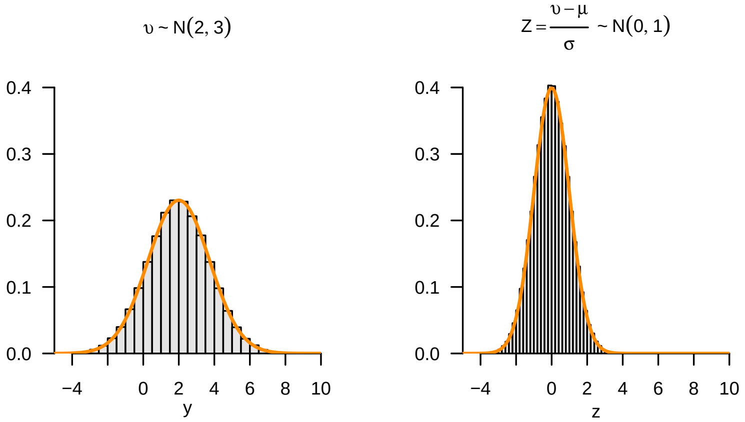
$$Z := \frac{\upsilon - \mu}{\sigma} \tag{33}$$

eine Z-verteilte Zufallsvariable, es gilt also $Z \sim N(0, 1)$.

Bemerkungen

- Z wird hier als $(\upsilon - \mu)/\sigma$ definiert. Dass ein solches Z aber eine z-Zufallsvariable ist, muss bewiesen werden und ergibt sich nicht einfach durch die Wahl des Bezeichners für $(\upsilon - \mu)/\sigma$, welcher hier zufällig auch Z lautet. In analoger Form gilt diese Bemerkung auch für alle weiteren betrachteten Transformationen.
- Die Z-Konfidenzintervallstatistik und die Z-Teststatistik sind wichtige Anwendungsfälle.

Standardtransformationen



Beweis

Wir nutzen das univariate WDF Transformationstheorem für linear-affine Funktionen. Dazu halten wir zunächst fest, dass die Z-Transformation einer Funktion der Form

$$\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \zeta(y) := \frac{y - \mu}{\sigma} =: z \tag{34}$$

entspricht. Wir stellen weiterhin fest, dass die Umkehrfunktion von ζ durch

$$\zeta^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto \zeta^{-1}(z) := \sigma z + \mu \tag{35}$$

gegeben ist, da für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ gilt, dass

$$\zeta^{-1}(z) = \zeta^{-1}\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\sigma(y - \mu)}{\sigma} + \mu = y - \mu + \mu = y. \tag{36}$$

Schließlich stellen wir fest, dass für die Ableitung ζ' von ζ gilt, dass

$$\zeta'(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}. \tag{37}$$

Beweis (fortgeführt)

Einsetzen in das univariate WDF Transformationstheorem für lineare Funktionen ergibt dann

$$
\begin{aligned}
p_\zeta(z) &= \frac{1}{|1/\sigma|} N\left(\sigma z + \mu; \mu, \sigma^2\right) \\
&= \frac{1}{1/\sqrt{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sigma z + \mu - \mu\right)^2\right) \\
&= \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^2 z^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \\
&= N(z; 0, 1)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

also, dass $Z \sim N(0,1)$. Z ist also eine z-Zufallsvariable.

Definition (χ^2-Zufallsvariable)

U sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}_{>0}$ und WDF

$$p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, u \mapsto p(u) := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right), \tag{39}$$

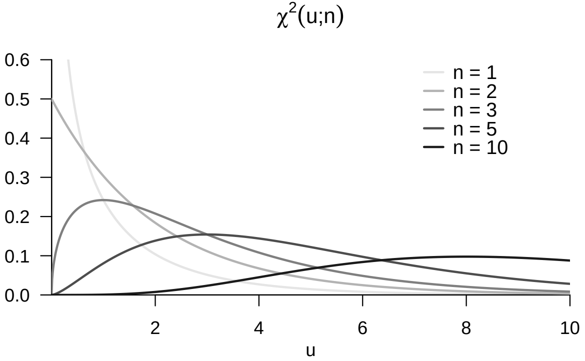
wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass U einer χ^2-Verteilung mit Freiheitsgradparameter n unterliegt und nennen U eine χ^2-Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter n. Wir kürzen dies mit $U \sim \chi^2(n)$ ab. Die WDF einer χ^2-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$\chi^2(u;n) := \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right). \tag{40}$$

Bemerkung

- Die WDF der χ^2-Verteilung entspricht der WDF $G\left(u; \frac{n}{2}, 2\right)$ einer Gammaverteilung.

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von ξ^2-Zufallsvariablen



Steigendes n verbreitert $\chi^2(u;n)$ und verschiebt Masse zur größeren Werten.

Theorem (χ^2-Transformation)

$Z_1, ..., Z_n \sim N(0,1)$ seien unabhängig und identisch verteilte z-Zufallsvariablen. Dann ist die Zufallsvariable

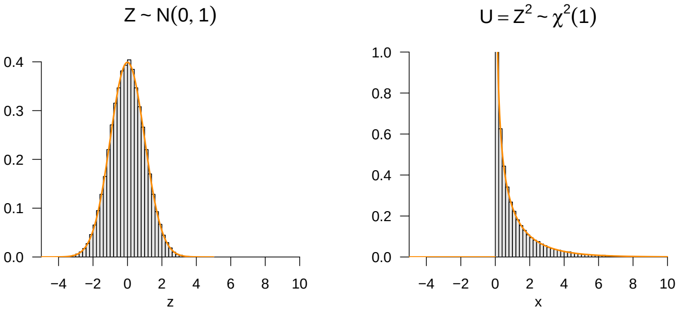
$$U := \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \tag{41}$$

eine χ^2-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter n, es gilt also $U \sim \chi^2(n)$. Insbesondere gilt für $Z \sim N(0,1)$ und $U := Z^2$, dass $U \sim \chi^2(1)$.

Bemerkungen

- Die U-Konfidenzintervallstatistik ist ein wichtiger Anwendungsfall.
- t- und f-Zufallsvariablen sind wichtige Anwendungsfälle.

Standardtransformationen



Standardtransformationen

Beweis

Wir zeigen das Theorem nur für den Fall $n := 1$ mithilfe des WDF Transformationstheorems für stückweise bijektive Abbildungen. Danach ist die WDF einer Zufallsvariable $U := f(Z)$, welche aus der Transformation einer Zufallsvariable Z mit WDF p_ζ durch eine stückweise bijektive Abbildung hervorgeht, gegeben durch

$$p_U(u) = \sum_{i=1}^k 1_{\mathcal{U}_i} \frac{1}{|f_i'(f_i^{-1}(u))|} p_\zeta \left(f_i^{-1}(u)\right). \tag{42}$$

Wir definieren

$$\mathcal{U}_1 :=]-\infty, 0[, \mathcal{U}_2 :=]0, \infty[, \text{ und } \mathcal{U}_i := \mathbb{R}_{>0} \text{ für } i = 1, 2, \tag{43}$$

sowie

$$f_i : \mathcal{Z}_i \to \mathcal{U}_i, x \mapsto f_i(z) := z^2 =: u \text{ für } i = 1, 2. \tag{44}$$

Die Ableitung und die Umkehrfunktion der f_i ergeben sich zu

$$f_i' : \mathcal{Z}_i \to \mathcal{Z}_i, x \mapsto f_i'(z) = 2z \text{ für } i = 1, 2, \tag{45}$$

und

$$f_1^{-1} : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_1, u \mapsto f_1^{-1}(u) = -\sqrt{u} \text{ und } f_2^{-1} : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_2, u \mapsto f_2^{-1}(u) = \sqrt{u}, \tag{46}$$

respektive.

Standardtransformationen

Beweis (fortgeführt)

Einsetzen in Gleichung (42) ergibt dann

$$
\begin{aligned}
p_U(u) &= 1_{\mathcal{U}_1}(u)\frac{1}{|f_1'(f_1^{-1}(u))|}p_\zeta\left(f_1^{-1}(u)\right) + 1_{\mathcal{U}_2}(u)\frac{1}{|f_2'(f_2^{-1}(u))|}p_\zeta\left(f_2^{-1}(u)\right) \\
&= \frac{1}{|2(-\sqrt{u})|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(-\sqrt{u})^2\right) + \frac{1}{|2(\sqrt{u})|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{u})^2\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right) + \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right).
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Andererseits gilt, dass mit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, die PDF einer χ^2-Zufallsvariable U mit $n = 1$ durch

$$
\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}}}u^{\frac{1}{2}-1}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right) \tag{48}
$$

gegeben ist. Also gilt, dass wenn $Z \sim N(0,1)$ ist, dann ist $U := Z^2 \sim \chi^2(1)$.

Definition (t-Zufallsvariable)

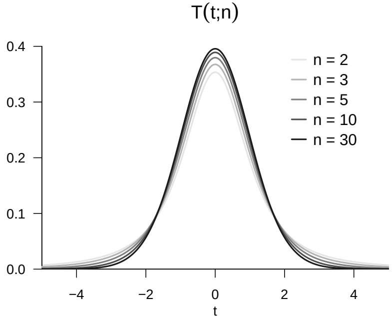
T sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, t \mapsto p(t) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{49}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass T einer t-Verteilung mit Freiheitsgradparameter n unterliegt und nennen T eine t-Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter n. Wir kürzen dies mit $T \sim t(n)$ ab. Die WDF einer t-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$T(t; n) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{50}$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von t-Zufallsvariablen



- Die Verteilung ist um 0 symmetrisch
- Steigendes n verschiebt Wahrscheinlichkeitsmasse aus den Ausläufen zum Zentrum.
- Ab $n = 30$ gilt $T(t; n) \approx N(0, 1)$.

Theorem (T-Transformation)

$Z \sim N(0,1)$ sei eine z-Zufallsvariable, $U \sim \chi^2(n)$ sei eine χ^2-Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter n, und Z und U seien unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist die Zufallsvariable

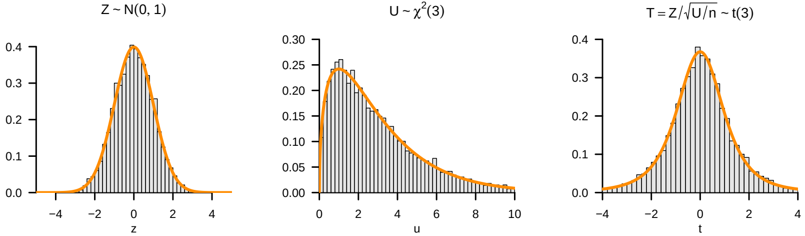
$$T := \frac{Z}{\sqrt{U/n}} \tag{51}$$

eine t-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter n, es gilt also $T \sim t(n)$.

Bemerkungen

- Das Theorem geht auf Student (1908) zurück.
- Das Theorem ist das zentrale Resultat der Frequentistischen Statistik.
- Zabell (2008) gibt hierzu einen historischen Überblick.
- Die T-Konfidenzintervallstatistik und die T-Teststatistik sind wichtige Anwendungsfälle.

Standardtransformationen



Beweis

Wir halten zunächst fest, dass die zweidimensionale WDF der gemeinsamen (unabhängigen) Verteilung von Z und U durch

$$p_{Z,U}(z,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right). \tag{52}$$

gegeben ist. Wir betrachten dann die multivariate vektorwertige Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (z,u) \mapsto f(z,u) := \left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}, u\right) =: (t,w) \tag{53}$$

und benutzen das multivariate WDF Transformationstheorem für bijektive Abbildungen um die WDF von (t,w) herzuleiten. Dazu erinnern wir uns, dass wenn ξ ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit WDF p_ξ und $\upsilon := f(\xi)$ für eine differenzierbare und bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, die WDF des Zufallsvektors υ durch

$$p_\upsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto p_\upsilon(y) := \frac{1}{|J^f\left(f^{-1}(y)\right)|} p_\xi\left(f^{-1}(y)\right) \tag{54}$$

gegeben ist. Für die im vorliegenden Fall betrachtete Abbildung halten wir zunächst fest, dass

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (t,w) \mapsto f^{-1}(t,w) := \left(\sqrt{w/n}t, w\right). \tag{55}$$

Beweis (fortgeführt)

Dies ergibt sich direkt aus

$$f^{-1}(f(z,u)) = f^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}, u\right) = \left(\frac{\sqrt{u/n}z}{\sqrt{u/n}}, u\right) = (z,u) \text{ für alle } (z,u) \in \mathbb{R}^2. \tag{56}$$

Wir halten dann fest, dass die Determinante der Jacobi-Matrix von f an der Stelle (z,u) durch

$$|J^f(z,u)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}\right) & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z}{\sqrt{u/n}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z} u & \frac{\partial}{\partial u} u \end{vmatrix} = \left(\frac{v}{n}\right)^{-1/2}, \tag{57}$$

gegeben ist, sodass folgt, dass

$$\frac{1}{|J^f\left(f^{-1}(z,u)\right)|} = \left(\frac{w}{n}\right)^{1/2}. \tag{58}$$

Einsetzen in Gleichung (54) ergibt dann

$$p_{T,W}(t,w) = \left(\frac{w}{n}\right)^{1/2} p_{Z,V}\left(\sqrt{w/n}t, w\right), \tag{59}$$

Standardtransformationen

Beweis (fortgeführt)

Es folgt also

$$
\begin{aligned}
p_T(t) &= \int_0^\infty p_{T,W}(t,w)\,dw \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{w}{n}\right)^{1/2} p_{Z,V}\left(\sqrt{w/n}t, w\right)\,dw \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{w/n}t)^2\right) \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} w^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right)\left(\frac{w}{n}\right)^{1/2}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{w}{n}t^2\right) w^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) w^{1/2}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{w}{n}t^2 - \frac{1}{2}w\right) w^{\frac{n}{2}-1} w^{\frac{1}{2}}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{w}{n}t^2 + w\right)\right) w^{\frac{n+1}{2}-1}\,dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) w^{\frac{n+1}{2}-1}\,dw
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Standardtransformationen

Beweis (fortgeführt)

Wir stellen dann fest, dass der Integrand auf der linken Seite der obigen Gleichung dem Kern einer Gamma WDF mit Parametern $\alpha = \frac{n+1}{2}$ und $\beta = \frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}$ entspricht, wie man leicht einsieht:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(w;\alpha,\beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} w^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{w}{\beta}\right) \\
\Rightarrow \Gamma\left(w;\frac{n+1}{2},\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}} w^{\frac{n+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{w}{\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}}\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\right) w^{\frac{n+1}{2}-1}.
\end{aligned}
$$

Beweis (fortgeführt)

Es ergibt sich also

$$p_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \Gamma\left(w; \frac{n+1}{2}, \frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right) dw. \tag{61}$$

Schließlich stellen wir fest, dass der Integralterm in obiger Gleichung dem Normalisierungsterm einer Gamma WDF entspricht. Abschließend ergibt sich also

$$p_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{2}{1+\frac{t^2}{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}}. \tag{62}$$

Die Verteilung von $Z/\sqrt{U/n}$ hat also die WDF einer T-Zufallsvariable.

$\square$

Definition (f-Zufallsvariable)

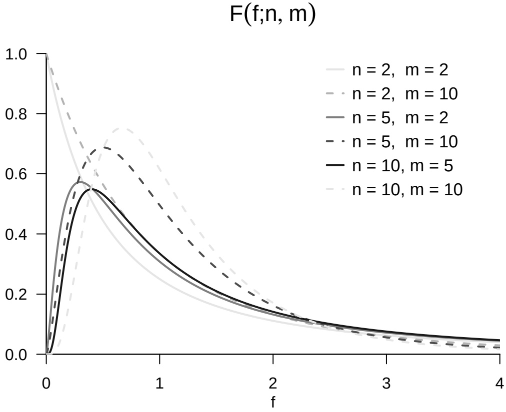
F sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}_{>0}$ und WDF

$$p_F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, f \mapsto p_F(f) := m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, \frac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}f\right)^{\frac{m+n}{2}}}, \tag{63}$$

wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann sagen wir, dass F einer f-Verteilung mit Freiheitsgradparametern n, m unterliegt und nennen F eine f-Zufallsvariable mit Freiheitsgradparametern n, m. Wir kürzen dies mit $F \sim f(n, m)$ ab. Die WDF einer f-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$F(f; n, m) := m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, \frac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}f\right)^{\frac{m+n}{2}}}. \tag{64}$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von f-Zufallsvariablen



Theorem (F-Transformation)

$V \sim \chi^2(n)$ und $W \sim \chi^2(m)$ seien zwei unabhängige χ^2-Zufallfsvariablen mit Freiheitsgradparametern n und m, respektive. Dann ist die Zufallsvariable

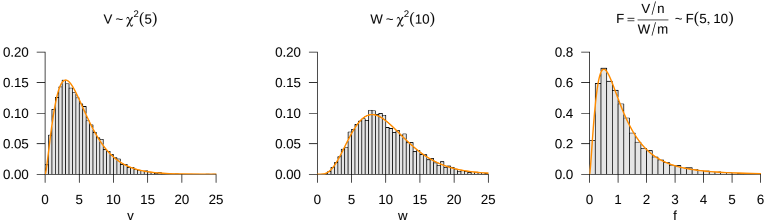
$$F := \frac{V/n}{W/m} \tag{65}$$

eine f-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparametern n, m, es gilt also $F \sim f(n, m)$.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis
- Das Theorem kann bewiesen werden, in dem man zunächst ein Transformationstheorem für Quotienten von Zufallsvariablen mithilfe des multivariaten Transformationstheorems und Marginalisierung herleitet und dieses Theorem dann auf die WDF von χ^2-verteilten ZVen anwendet. Dabei ist die Regel zur Integration durch Substitution von zentraler Bedeutung.

Standardtransformationen



Vorbemerkungen

Transformationstheoreme

Standardtransformationen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie den Begriff der Transformation einer Zufallsvariable.
2. Erläutern Sie die zentrale Idee der Transformationstheoreme.
3. Erläutern Sie die Bedeutung der Standardtransformationen für die Frequentistische Inferenz.
4. Geben Sie das Theorem zur Summe unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen wieder.
5. Geben Sie das Theorem zum Stichprobenmittel von u.i.v. normalverteilten Zufallsvariablen wieder.
6. Geben Sie das Z-Transformationstheorem wieder.
7. Geben Sie das χ^2-Transformationstheorem wieder.
8. Beschreiben Sie die WDF der t-Verteilung in Abhängigkeit ihres Freiheitsgradparameters.
9. Geben Sie das T-Transformationstheorem wieder.
10. Geben Sie das F-Transformationstheorem wieder.

Selbstkontrollfragen - Antworten

1. Mit einer Transformation ist hier die Anwendung einer Funktion auf eine Zufallsvariable oder die Verknüpfung einer Zufallsvariable mit einer anderen Zufallsvariable gemeint.
2. Die zentrale Idee der Transformationstheoreme ist es, generelle Werkzeuge bereitzustellen, die es ermöglichen, basierend auf der WDF einer kontinuierlichen Zufallsvariable und der Form ihrer Transformation die WDF, also die Verteilung, der entsprechend tranformierten Zufallsvariable zu berechnen.
3. Die Standardtransformationen sind in der Frequentistischen Inferenz zentral, da viele der gebräuchlichsten Modelle von normalverteilten Fehlervariablen ausgehen, die im Rahmen der Modelle und durch auf ihnen basierenden Statistiken im Sinne der Standardtransformationen transformiert werden. Wissen um die Resultate der Standardtransformationen spiegelt entspricht dann dem Wissen um die Verteilungen von Datenvariablen und Statistiken in der Frequentistischen Inferenz.
4. Siehe Theorem (Summe unabhängig normalverteilter Zufallsvariablen).
5. Siehe Theorem (Stichprobenmittel von u.i.v. normalverteilten Zufallsvariablen).
6. Siehe Theorem (Z-Transformation).
7. Siehe Theorem (χ^2-Transformation).
8. Unabhängig von ihrem Freiheitsgradparameter ist die WDF der t-Verteilung um 0 symmetrisch und ähnelt der WDF der Standardnormalverteilung. Bei geringem Freiheitsgradparameter besitzt die WDF der t-Verteilung in ihren Ausläufern eine höhere Wahrscheinlichkeitsdichte als die Standardnormalverteilung, für steigenden Freiheitsgradparameter nähert sich die WDF der t-Verteilung der WDF der Standardnormalverteilung an und ist ab etwa $n = 30$ mit ihr im Wesentlichen identisch.
9. Siehe Theorem (T-Transformation).
10. Siehe Theorem (F-Transformation).

Referenzen

Student. 1908. "The Probable Error of a Mean." *Biometrika* 6 (1): 1–25.

Zabell, S. L. 2008. "On Student's 1908 Article 'The Probable Error of a Mean'." *Journal of the American Statistical Association* 103 (481): 1–7. https://doi.org/10.1198/016214508000000030.