



Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(6) Ungleichungen und Grenzwerte

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Theorem (Markov Ungleichung)

ξ sei eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{x}. \quad (1)$$

Bemerkungen

- Weil $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$ gilt, sagt man auch, dass ξ eine *nicht-negative* Zufallsvariable ist.
- Die Ungleichung setzt Überschreitungswahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte in Bezug.
- Gilt z.B. für eine nichtnegative Zufallsvariable ξ , dass $\mathbb{E}(\xi) = 1$, dann ist $\mathbb{P}(\xi \geq 100) \leq 0.01$.

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Beweis

Wir betrachten den Fall einer kontinuierlichen Zufallsvariable ξ mit WDF p . Wir halten zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} s p(s) ds = \int_0^{\infty} s p(s) ds = \int_0^x s p(s) ds + \int_x^{\infty} s p(s) ds, \quad (2)$$

weil ξ nicht-negativ ist. Es folgt dann

$$\mathbb{E}(\xi) \geq \int_x^{\infty} s p(s) ds \geq \int_x^{\infty} x p(s) ds = x \int_x^{\infty} p(s) ds = x \mathbb{P}(\xi \geq x). \quad (3)$$

Dabei gilt die erste Ungleichung weil

$$\int_0^x s p(s) ds \geq 0 \quad (4)$$

und die zweite Ungleichung gilt, weil $x \leq \xi$ für $\xi \in [x, \infty[$. Es folgt also, dass

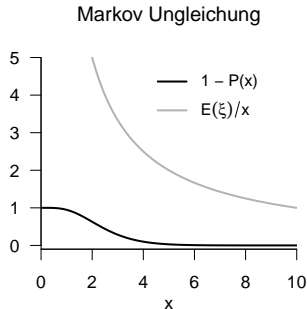
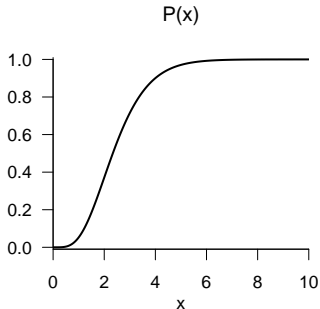
$$\mathbb{E}(\xi) \geq x \mathbb{P}(\xi \geq x) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{x}. \quad (5)$$

□

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Beispiel ($\xi \sim G(\alpha, \beta)$)

- Wir halten ohne Beweis fest, dass für $\xi \sim G(\alpha, \beta)$ gilt, dass $\mathbb{E}(\xi) = \alpha\beta$.
- Wir betrachten den Fall $\alpha := 5, \beta := 2$, so dass $G(x; 5, 2) = \chi^2(10)$



Theorem (Chebyshev Ungleichung)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Varianz $\mathbb{V}(\xi)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(\xi)}{x^2}. \quad (6)$$

Bemerkungen

- Die Chebyshev Ungleichung setzt Abweichungen vom Erwartungswert in Bezug zur Varianz.
- Zum Beispiel gilt

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq 3\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}) \leq \frac{\mathbb{V}(\xi)}{(3\sqrt{\mathbb{V}(\xi)})^2} = \frac{1}{9}. \quad (7)$$

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dass aus $a^2 \geq b^2$ folgt, dass $|a| \geq b$. Dazu betrachten wir die folgenden vier möglichen Fälle.

(1) $a^2 \geq b^2$ für $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow a \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \quad (8)$$

(2) $a^2 \geq b^2$ für $a \leq 0$ und $b \geq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow -a \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \quad (9)$$

(3) $a^2 \geq b^2$ für $a \geq 0$ und $b \leq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow a \geq -b \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \quad (10)$$

(4) $a^2 \geq b^2$ für $a \leq 0$ und $b \leq 0$. Dann gilt

$$a^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow -a \geq -b \geq b \Rightarrow |a| \geq b. \quad (11)$$

Als nächstes definieren wir $v := (\xi - \mathbb{E}(\xi))^2$. Dann folgt aus der Markov Ungleichung

$$\mathbb{P}(v \geq x^2) \leq \frac{\mathbb{E}(v)}{x^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 \geq x^2) \leq \frac{\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2)}{x^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq x) \leq \frac{\mathbb{V}(\xi)}{x^2}. \quad (12)$$

□

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Theorem (Cauchy-Schwarz Ungleichung)

ξ und v seien zwei Zufallsvariablen und $\mathbb{E}(\xi v)$ sei endlich. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\xi v)^2 \leq \mathbb{E}(\xi^2) \mathbb{E}(v^2). \quad (13)$$

Bemerkungen

- Analog gilt für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, dass $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
- Die Korrelationsungleichung ist eine direkte Konsequenz der Cauchy-Schwarz Ungleichung.
- Für einen Beweis verweisen wir auf DeGroot and Schervish (2012), Theorem 4.6.2.

Theorem (Korrelationsungleichung)

ξ und v seien Zufallsvariablen mit $\mathbb{V}(\xi), \mathbb{V}(v) > 0$. Dann gelten

$$\frac{\mathbb{C}(\xi, v)^2}{\mathbb{V}(\xi)\mathbb{V}(v)} \leq 1 \text{ und } -1 \leq \rho(\xi, v) \leq 1. \quad (14)$$

Bemerkung

- Korrelationen nehmen also immer Werte im Intervall $[-1, 1]$ an.

Erwartungswertungleichungen

Beweis

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung für zwei Zufallsvariablen α und β gilt, dass

$$\mathbb{E}(\alpha\beta)^2 \leq \mathbb{E}(\alpha^2) \mathbb{E}(\beta^2). \quad (15)$$

Wir definieren nun $\alpha := \xi - \mathbb{E}(\xi)$ und $\beta := v - \mathbb{E}(v)$. Dann besagt die Cauchy-Schwarz Ungleichung gerade, dass

$$\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))(v - \mathbb{E}(v)))^2 \leq \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2) \mathbb{E}((v - \mathbb{E}(v))^2). \quad (16)$$

Also gilt

$$C(\xi, v)^2 \leq V(\xi)V(v) \Leftrightarrow \frac{C(\xi, v)^2}{V(\xi)V(v)} \leq 1. \quad (17)$$

Weiterhin folgt aus der Definition der Korrelation dann sofort, dass auch

$$\rho(\xi, v)^2 \leq 1. \quad (18)$$

Dann gilt aber auch

$$|\rho(\xi, v)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \rho(\xi, v) \leq 1, \quad (19)$$

denn

(1) für $\rho(\xi, v) \geq 0$ gilt $\rho(\xi, v)^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\rho(\xi, v)^2} \leq \sqrt{1} \Rightarrow \rho(\xi, v) \leq 1 \Rightarrow |\rho(\xi, v)| \leq 1$ und

(2) für $\rho(\xi, v) < 0$ gilt $\rho(\xi, v)^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\rho(\xi, v)^2} \leq \sqrt{1} \Rightarrow -\rho(\xi, v) \leq 1 \Rightarrow |\rho(\xi, v)| \leq 1$

□

Theorem (Jensensche Ungleichung)

ξ sei eine Zufallsvariable und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h.

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \quad (20)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}(\xi)). \quad (21)$$

Analog sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konkave Funktion, d.h.

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \quad (22)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(g(\xi)) \leq g(\mathbb{E}(\xi)). \quad (23)$$

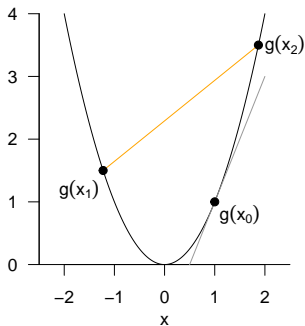
Bemerkungen

- Bei konvexem g liegt der Funktionsgraph unter der Geraden von $g(x_1)$ zu $g(x_2)$.
- Bei konkavem g liegt der Funktionsgraph über der Geraden von $g(x_1)$ zu $g(x_2)$.
- Der Logarithmus ist eine konkave Funktion, also gilt $\mathbb{E}(\ln \xi) \leq \ln \mathbb{E}(\xi)$.

Erwartungswertungleichungen

Visualisierung einer konvexen Funktion

$$- g(x) := x^2$$



$$- \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \text{ für } x_1 := -\sqrt{1.5}, x_2 := \sqrt{3.5}, \lambda \in [0, 1]$$

$$- t(x) := g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \text{ für } x_0 := 1$$

Erwartungswertungleichungen

Beweis

Es sei g eine konvexe Funktion. Dann gilt für die Tangente t von g in $x_0 \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$g(x) \geq t(x) := g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \quad (24)$$

Wir setzen nun $x := \xi$ und $x_0 := \mathbb{E}(\xi)$. Dann gilt mit obiger Ungleichung, dass

$$g(\xi) \geq g(\mathbb{E}(\xi)) + g'(\mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi)) \quad (25)$$

Erwartungswertbildung ergibt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(\xi)) &\geq \mathbb{E}(g(\mathbb{E}(\xi))) + \mathbb{E}(g'(\mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}(\xi)) + g'(\mathbb{E}(\xi))\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}(\xi)) + g'(\mathbb{E}(\xi))(\mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\xi)) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(g(\xi)) \geq g(\mathbb{E}(\xi)). \end{aligned} \quad (26)$$

Sei nun g eine konkave Funktion. Dann ist $-g$ eine konvexe Funktion. Mit der Jensenschen Ungleichung für konvexe Funktionen folgt dann die Jensensche Ungleichung für konkave Funktionen aus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(-g(\xi)) &\geq -g(\mathbb{E}(\xi)) \\ \Leftrightarrow -\mathbb{E}(g(\xi)) &\geq -g(\mathbb{E}(\xi)) \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}(g(\xi)) &\leq g(\mathbb{E}(\xi)). \end{aligned} \quad (27)$$

□

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Überblick

- Es gibt ein *Schwaches Gesetz der Großen Zahl* und ein *Starkes Gesetz der Großen Zahl*.
- Intuitiv besagen beide Gesetze, dass sich das Stichprobenmittel von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen für eine große Anzahl an Zufallsvariablen dem Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilung nähert.
- Das Schwache und das Starke Gesetz der Großen Zahl unterscheiden sich in Hinblick auf die zu ihrer Formulierung benutzen Formen der *Konvergenz von Zufallsvariablen*.
 - Das Schwache Gesetz basiert auf der *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit*.
 - Das Starke Gesetz basiert auf der *fast sicheren Konvergenz*.
- Wir begnügen uns mit dem Schwachen Gesetz.

Theorem (Schwaches Gesetz der Großen Zahl)

ξ_1, \dots, ξ_n seien u.i.v. Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi_i) =: \mu$ für alle $i = 1, \dots, n$ und

$$\bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (28)$$

sei das Stichprobenmittel der $\xi_i, i = 1, \dots, n$. Dann gilt für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0. \quad (29)$$

Bemerkungen

- Die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel nahe am Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilungen der ξ_i liegt, nähert sich 1, wenn $n \rightarrow \infty$; die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel weit entfernt vom Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilungen der ξ_i liegt, nähert sich 0, wenn $n \rightarrow \infty$.
- Die hier betrachtete Folgenkonvergenzart ist die sogenannte *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit*.

Gesetze der Großen Zahl

Beweis

Mit der Linearkombinationseigenschaft des Erwartungswerts gilt zunächst, dass

$$\mu = \mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{n} n \mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \mathbb{E}(\bar{\xi}_n). \quad (30)$$

Der Erwartungswert der i ten Stichprobenvariable ξ_i stimmt also mit dem Erwartungswert des Stichprobenmittels $\bar{\xi}_n$ überein. Weiterhin halten wir fest, dass mit der Linearkombinationseigenschaft bei Unabhängigkeit der Varianz gilt, dass

$$\mathbb{V}(\bar{\xi}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(\xi_i) = \frac{1}{n^2} n \mathbb{V}(\xi_i) = \frac{\mathbb{V}(\xi_i)}{n}. \quad (31)$$

für $i = 1, \dots, n$. Die Varianz des Stichprobenmittels ergibt sich also durch Teilen der Varianz der i ten Stichprobe durch n . Mit der Chebyshev Ungleichung gilt dann aber

$$\mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - \mathbb{E}(\bar{\xi}_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{\xi}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(\xi_i)}{n\epsilon^2}. \quad (32)$$

Dann aber gilt für beliebige $\mathbb{V}(\xi_i) \geq 0$ und $\epsilon > 0$ und mit der Nichtnegativität der Wahrscheinlichkeit

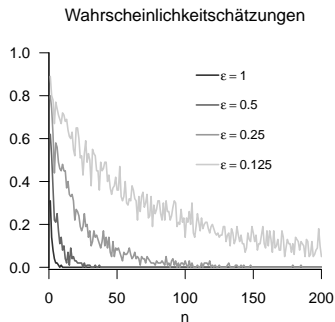
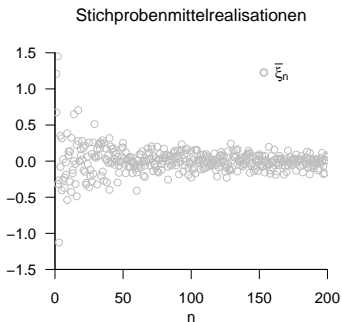
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - \mathbb{E}(\bar{\xi}_n)| \geq \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}(\xi_i)}{n\epsilon^2} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0 \quad (33)$$

und es ist alles gezeigt. \square

Gesetze der Großen Zahl

Beispiel ($\xi_1, \dots, \xi_n \sim N(0, 1)$)

- Die linke Abbildung zeigt Realisationen von $\bar{\xi}_n$ als Funktion von n .
- Die rechte Abbildung zeigt Schätzungen von $\mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - \mu| \geq \epsilon)$ als Funktionen von n und ϵ .



Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Überblick

- Die Zentralen Grenzwertsätze besagen, dass die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 asymptotisch, d.h. für unendlich viele Zufallsvariablen, normalverteilt mit Erwartungswertparameter 0 ist.
- Modelliert man einen Datenpunkt v also als Summe eines deterministischen Einflusses μ und der Summe

$$\varepsilon := \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (34)$$

einer Vielzahl von unabhängigen Zufallsvariablen $\xi_i, i = 1, \dots, n$, welche unbekannte Störeinflüsse beschreiben, so ist für großes n die Annahme

$$v = \mu + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (35)$$

also mathematisch gerechtfertigt.

- Wie wir später sehen werden, liegt die Annahme in Gleichung (35) vielen probabilistischen Modellen zugrunde.
- In der "Lindenberg und Lévy" Form des Zentralen Grenzwertsatzes werden unabhängig und identische Zufallsvariablen vorausgesetzt. In der "Liapunov" Form werden nur unabhängige Zufallsvariablen vorausgesetzt. Der Beweis der "Lindenberg und Lévy" Form ist einfacher als der Beweis der "Liapunov" Form. Wir verzichten hier aber auf die Angabe von Beweisen.
- Zur mathematik-geschichtlichen Genese der Zentralen Grenzwertsätze siehe z.B. Fischer (2011).

Theorem (Zentraler Grenzwertsatz nach Lindenberg und Lévy)

ξ_1, \dots, ξ_n seien unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}(\xi_i) := \mu \text{ und } \mathbb{V}(\xi_i) := \sigma^2 > 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n. \quad (36)$$

Weiterhin sei P_{ζ_n} die KVF der Zufallsvariable

$$\zeta_n := \sqrt{n} \frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sigma}. \quad (37)$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\zeta_n}(z) = \Phi(z), \quad (38)$$

wobei Φ die KVF der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Bemerkung

- Die hier betrachtete Folgenkonvergenzart ist die sogenannte *Konvergenz in Verteilung*.
- Wir zeigen später, dass damit für $n \rightarrow \infty$ asymptotisch auch gilt, dass

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \text{ und } \bar{\xi}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \quad (39)$$

Zentrale Grenzwertsätze

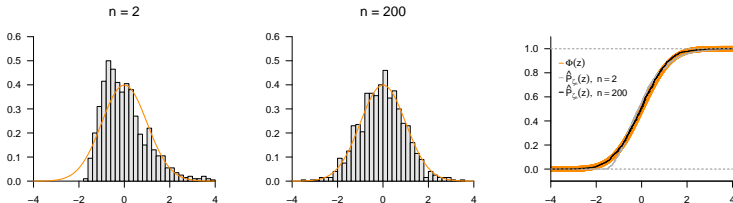
Beispiel $(\xi_1, \dots, \xi_n \sim \chi^2(k))$

- Wir halten ohne Beweis fest, dass $\mathbb{E}(\xi_i) = k$ und $\mathbb{V}(\xi_i) = 2k$.
- Wir betrachten das Szenario $\xi_i \sim \chi^2(3)$ für $i = 1, \dots, n$.
- Die linken Abbildungen zeigen Histogrammschätzer der Wahrscheinlichkeitsdichte von

$$\zeta_n := \sqrt{n} \frac{\bar{\xi}_n - \mu}{\sigma} \quad (40)$$

basierend auf 1000 Realisationen von ζ_n für $n = 2$ und $n = 200$, sowie die WDF von $N(0, 1)$.

- Die rechte Abbildung zeigt die entsprechenden (empirischen) kumulativen Verteilungsfunktionen.



Theorem (Zentraler Grenzwertsatz nach Liapounov)

ξ_1, \dots, ξ_n seien unabhängige aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}(\xi_i) := \mu_i \text{ und } \mathbb{V}(\xi_i) := \sigma_i^2 > 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n \quad (41)$$

und

$$\mathbb{E}(|\xi_i - \mu_i|^3) < \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|\xi_i - \mu_i|^3)}{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{3/2}} = 0. \quad (42)$$

Weiterhin sei P_{ζ_n} die KVF der Zufallsvariable

$$\zeta_n := \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}. \quad (43)$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\zeta_n}(z) = \Phi(z), \quad (44)$$

wobei Φ die KVF der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Bemerkungen

- Die hier betrachtete Folgenkonvergenzart ist die sogenannte *Konvergenz in Verteilung*.
- Wir zeigen später, dass dann auch gilt, dass $\sum_{i=1}^n \xi_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$.

Wahrscheinlichkeitsungleichungen

Erwartungswertungleichungen

Gesetze der Großen Zahl

Zentrale Grenzwertsätze

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Markov Ungleichung wieder.
2. Geben Sie die Chebyshev Ungleichung wieder.
3. Geben Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung wieder.
4. Geben Sie die Korrelationsungleichung wieder.
5. Geben Sie das Schwache Gesetz der Großen Zahl wieder.
6. Erläutern Sie den Zentralen Grenzwertsatz nach Lindenberg und Lévy.
7. Erläutern Sie den Zentralen Grenzwertsatz nach Liapunov.
8. Warum sind die Zentralen Grenzwertsätze für die probabilistische Modellbildung wichtig?

Selbstkontrollfragen - Antworten

1. Siehe Theorem (Markov Ungleichung).
2. Siehe Theorem (Chebyshev Ungleichung).
3. Siehe Theorem (Cauchy-Schwarz Ungleichung).
4. Siehe Theorem (Korrelationsungleichung).
5. Siehe Theorem (Schwaches Gesetz der Großen Zahl).
6. Der Zentrale Grenzwertsatz nach Lindenberg und Lévy besagt, dass die standardisierte Summe unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen asymptotisch normalverteilt ist.
7. Der Zentrale Grenzwertsatz nach Liapunov besagt, dass die standardisierte Summe unabhängig und nicht notwendig identisch verteilter Zufallsvariablen asymptotisch normalverteilt ist.
8. Die Zentralen Grenzwertsätze begründen die häufige Annahme normalverteilter "Stör-", "Fehler-", "Abweichungs-" oder "Unsicherheitsvariablen" in probabilistischen Modellen.

- DeGroot, Morris H., and Mark J. Schervish. 2012. *Probability and Statistics*. 4th ed. Boston: Addison-Wesley.
- Fischer, Hans. 2011. *A History of the Central Limit Theorem*. New York, NY: Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-87857-7>.