



# Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

## (2) Elementare Wahrscheinlichkeiten

---

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unabhängige Ereignisse

Selbstkontrollfragen

---

## **Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten**

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unabhängige Ereignisse

Selbstkontrollfragen

## Definition (Gemeinsame Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien  $A, B \in \mathcal{A}$ . Dann heißt

$$\mathbb{P}(A \cap B) \tag{1}$$

die *gemeinsame Wahrscheinlichkeit von A und B*.

### Bemerkungen

- Zur Abgrenzung nennt man  $\mathbb{P}(A)$  auch manchmal auch *totale Wahrscheinlichkeit von A*.
- Intuitiv entspricht  $\mathbb{P}(A \cap B)$  der Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  und  $B$  gleichzeitig eintreten.
- In der Mechanik des W-Raummodells ist  $\mathbb{P}(A \cap B)$  die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Durchgang des Zufallsvorgang ein  $\omega$  mit sowohl  $\omega \in A$  und  $\omega \in B$  realisiert wird.

# Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten

## Beispiel

- Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitsraummodell des Werfens eines fairen Würfels.
- Wir betrachten die Ereignisse

$A := \{2, 4, 6\}$     Es fällt eine gerade Augenzahl

$B := \{4, 5, 6\}$     Es fällt eine Augenzahl größer als Drei

- Dann gilt  $A \cap B = \{4, 6\}$ .
- Die Interpretation von  $A \cap B = \{4, 6\}$  ist

“Es fällt eine gerade Augenzahl und diese Augenzahl ist größer als Drei.”

- Mit  $\mathbb{P}(\{4\}) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}$  und der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(\{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{4, 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{4\} \cup \{6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) && (2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

## Interpretation von $\mathbb{P}(A \cup B)$

- $\mathbb{P}(A \cap B)$  und  $\mathbb{P}(A \cup B)$  sollten nicht verwechselt werden.
- $\cup$  entspricht dem *inkluisiven oder*, also *und/oder*.
- $\Delta$  entspricht dem *exklusiven oder*, also *entweder..., oder ..., aber nicht beides*.
- $A \cup B$  entspricht also dem Ereignis, dass  $A$  und/oder  $B$  eintritt.
- $\omega \in A \cup B$  ist also schon erfüllt, wenn "nur"  $\omega \in A$  oder "nur"  $\omega \in B$  gilt.
- Für obiges Beispiel gilt

$$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\} \quad (3)$$

mit der Interpretation

"Es fällt eine gerade Augenzahl oder es fällt eine Augenzahl größer als Drei oder es fällt eine gerade Augenzahl und diese Augenzahl ist größer als Drei".

und der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\{2, 4, 5, 6\}) = 4/6 = 2/3. \quad (4)$$

### Theorem (Weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien  $A, B \in \mathcal{A}$  Ereignisse. Dann gelten

1.  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
2.  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
3.  $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
5.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

### Bemerkungen

- Die Eigenschaften sind in der Analyse probabilistischer Modelle oft nützlich.



# Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten

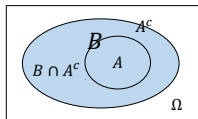
## Beweis

Die zweite, dritte, und vierte Aussage dieses Theorems basieren auf elementaren mengentheoretischen Aussagen und der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$ . Wir wollen diese elementaren mengentheoretischen Aussagen hier nicht beweisen, sondern verweisen jeweils auf die Intuition, die durch die Venn-Diagramme in untenstehender Abbildung vermittelt wird.

A

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c)$$

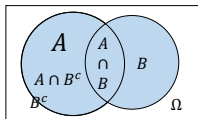
$$A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$$



B

$$(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$$

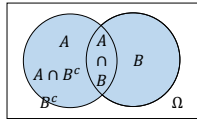
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$



C

$$B \cap (A \cap B^c) = \emptyset$$

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$$



Zu 1.: Wir halten zunächst fest, dass aus  $A^c := \Omega \setminus A$  folgt, dass  $A^c \cup A = \Omega$  und dass  $A^c \cap A = \emptyset$ . Mit der Normiertheit und der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$  folgt dann

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A^c \cup A) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A). \quad (5)$$

# Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten

## Beweis (fortgeführt)

Zu 2.: Zunächst gilt (vgl. Abbildung A)

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c) \text{ mit } A \cap (B \cap A^c) = \emptyset. \quad (6)$$

Mit der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$  folgt dann aber

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c). \quad (7)$$

Mit  $\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0$  folgt dann  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

Zu 3.: Zunächst gilt (vgl. Abbildung B)

$$(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset \text{ und } A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c). \quad (8)$$

Mit der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$  folgt dann

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^c) \quad (9)$$

Zu 4.: Zunächst gilt (vgl. Abbildung C)

$$B \cap (A \cap B^c) = \emptyset \text{ und } A \cup B = B \cup (A \cap B^c). \quad (10)$$

Mit der  $\sigma$ -Additivität von  $\mathbb{P}$  folgt dann

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c). \quad (11)$$

Mit 3. folgt dann

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad (12)$$

Zu 5.: Die Aussage folgt direkt aus 4. mit  $\mathbb{P}(A \cap B) = \emptyset$  und  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ . □

---

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten

**Bedingte Wahrscheinlichkeiten**

Unabhängige Ereignisse

Selbstkontrollfragen

## Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B \in \mathcal{A}$  seien Ereignisse mit  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Die *bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$  gegeben das Ereignis  $B$*  ist definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (13)$$

Weiterhin heißt das für ein festes  $B \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$  definierte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (14)$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben Ereignis  $B$* .

# Bedingte Wahrscheinlichkeiten

## Bemerkungen

- $\mathbb{P}(A|B)$  ist die mit  $1/\mathbb{P}(B)$  skalierte gemeinsame Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A \cap B)$ .
- Die Festlegung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A \cap B)$  legt  $\mathbb{P}(A|B)$  schon fest.
- Im Gegensatz zu  $\mathbb{P}(\cdot \cap B)$  definiert  $\mathbb{P}(\cdot|B)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß für alle  $A \in \mathcal{A}$ .
- Es gelten also
  - $\mathbb{P}(A|B) \geq 0$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ ,
  - $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$  und
  - $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B)$  für paarweise disjunkte  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ .
- $\Rightarrow$  Die Rechenregeln der Wahrscheinlichkeitstheorie gelten für die Ereignisse links des Strichs.
- Üblicherweise gilt  $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$ , z.B.

$$\mathbb{P}(\text{Tod}|\text{Erhängen}) \neq \mathbb{P}(\text{Erhängen}|\text{Tod}).$$

- Eine Verallgemeinerung für  $\mathbb{P}(B) = 0$  ist möglich, aber technisch aufwändig.

# Bedingte Wahrscheinlichkeiten

## Beispiel

Wir betrachten erneut das Modell  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  des fairen Würfels. Wir wollen die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis “Es fällt eine gerade Augenzahl” gegeben das Ereignis “Es fällt eine Zahl größer als Drei” berechnen. Wir haben oben bereits gesehen, dass das Ereignis “Es fällt eine gerade Augenzahl” der Teilmenge  $A := \{2, 4, 6\}$  von  $\Omega$  entspricht, und dass das Ereignis “Es fällt eine Zahl größer als Drei” der Teilmenge  $B := \{4, 5, 6\}$  von  $\Omega$  entspricht. Weiterhin haben wir gesehen, dass unter der Annahme, dass der modellierte Würfel fair ist, gilt, dass

$$\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\mathbb{P}(\{4, 5, 6\}) = \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Schließlich hatten wir auch gesehen, dass das Ereignis  $A \cap B$ , also das Ereignis “Es fällt eine gerade Augenzahl, die größer als Drei ist”, die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\}) = \mathbb{P}(\{4, 6\}) = \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad (17)$$

hat. Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann direkt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{4, 6\})}{\mathbb{P}(\{4, 5, 6\})} = \frac{\mathbb{P}(\{4\} \cup \{6\})}{\mathbb{P}(\{4\} \cup \{5\} \cup \{6\})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}. \quad (18)$$

Wenn man also weiß, dass eine Augenzahl größer als Drei gefallen ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine gerade Augenzahl handelt  $2/3$ . Wenn man ersteres nicht weiß, ist die Wahrscheinlichkeit für das Fallen einer geraden Augenzahl (nur)  $1/2$ . Dies Beispiel verdeutlicht insbesondere, dass das Bedingen auf einem Ereignis der Inkorporation von neuem Wissen in wahrscheinlichkeitstheoretische Modellen entspricht.

## Theorem (Gemeinsame und bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Es seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein W-Raum und  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(A) > 0$  und  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A). \quad (19)$$

### Beweis

Mit der Definition der jeweiligen bedingten Wahrscheinlichkeit folgen direkt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) \quad (20)$$

und

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A). \quad (21)$$

### Bemerkung

- Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten können aus bedingten und totalen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.
- Definition von  $\mathbb{P}(A)$  und  $\mathbb{P}(B|A)$  definiert  $\mathbb{P}(A \cap B)$  implizit mit.

# Bedingte Wahrscheinlichkeiten

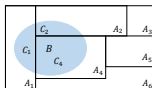
## Theorem (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A_1, \dots, A_k$  sei eine Partition von  $\Omega$ . Dann gilt für jedes  $B \in \mathcal{A}$ , dass

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i). \quad (22)$$

### Beweis

Für  $i = 1, \dots, k$  sei  $C_i := B \cap A_i$ , so dass  $\cup_{i=1}^k C_i = B$  und  $C_i \cap C_j = \emptyset$  für  $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$ , visuell



Also gilt

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(C_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i). \quad (23)$$

Bemerkung

- Totale Wahrscheinlichkeiten können aus bedingten und totalen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.
- $\mathbb{P}(B)$  entspricht der gewichteten Summe der bedingten Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(B|A_i)$  mit Gewichten  $\mathbb{P}(A_i)$ .



## Theorem (Theorem von Bayes)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A_1, \dots, A_k$  sei eine Partition von  $\Omega$  mit  $\mathbb{P}(A_i) > 0$  für alle  $i = 1, \dots, k$ . Wenn  $\mathbb{P}(B) > 0$  gilt, dann gilt für jedes  $i = 1, \dots, k$ , dass

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}. \quad (24)$$

### Beweis

Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}. \quad (25)$$

□

## Bemerkungen

- Das Theorem von Bayes ist eine zu  $\mathbb{P}(A_i \cap B)/\mathbb{P}(B)$  alternative Formel, um die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A_i|B)$  zu berechnen.
- Das Theorem von Bayes gilt unabhängig von der Frequentistischen oder Bayesianischen Interpretation von Wahrscheinlichkeiten.
- Im Rahmen der *Frequentistischen Inferenz* wird das Theorem von Bayes recht selten benutzt; hier steht vor allem die Tatsache  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$  bei Unabhängigkeit von  $A$  und  $B$  im Vordergrund.
- Im Rahmen der *Bayesianischen Inferenz* ist das Theorem von Bayes zentral; hier wird  $\mathbb{P}(A_i)$  oft *Prior Wahrscheinlichkeit* und  $\mathbb{P}(A_i|B)$  oft *Posterior Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A_i$*  genannt. Wie oben erläutert entspricht  $\mathbb{P}(A_i|B)$  dann der aktualisierten Wahrscheinlichkeit von  $A_i$ , wenn man um das Eintreten von  $B$  weiß.

---

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

**Unabhängige Ereignisse**

Selbstkontrollfragen

## Definition (Unabhängige Ereignisse)

Zwei Ereignisse  $A \in \mathcal{A}$  and  $B \in \mathcal{A}$  heißen *unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \quad (26)$$

Eine Menge von Ereignissen  $\{A_i | i \in I\} \subset \mathcal{A}$  mit beliebiger Indexmenge  $I$  heißt *unabhängig*, wenn für jede endliche Untermenge  $J \subseteq I$  gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j). \quad (27)$$

### Bemerkungen

- Die Unabhängigkeit bestimmter Ereignissen kann in der Definition eines probabilistischen Modells vorausgesetzt werden, so zum Beispiel die Unabhängigkeit von Fehlervariablen in statistischen Modellen.
- Die Unabhängigkeit von Ereignissen kann aus der Definition eines probabilistischen Modells folgen.
- Disjunkte Ereignisse mit von Null verschiedener Wahrscheinlichkeit sind nie unabhängig:

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0, \text{ aber } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0, \text{ also } \mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

- Die Bedingung der beliebigen Untermengen von  $I$  sichert die paarweise unabhängig der  $A_i, i \in I$ .
- Der Sinn der Produkteigenschaft bei Unabhängigkeit erschließt sich im Kontext *bedingter Wahrscheinlichkeiten*.

## Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B \in \mathcal{A}$  seien unabhängige Ereignisse mit  $\mathbb{P}(B) > 0$ .  
Dann gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A). \quad (28)$$

### Beweis

Unter den Voraussetzungen des Theorems gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A). \quad (29)$$

□

### Bemerkungen

- Bei Unabhängigkeit von  $A$  und  $B$  ist es irrelevant, ob auch  $B$  eintritt,  $\mathbb{P}(A)$  bleibt gleich.
- Unabhängigkeit wird also als  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$  modelliert, damit  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$  gilt.
- Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse bedeutet also, dass das Wissen um das Eintreten eines der beiden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert. Andersherum bedeutet Abhängigkeit, dass das Wissen um das Eintreten eines der beiden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses verändert, also erhöht oder verringert.

---

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unabhängige Ereignisse

**Selbstkontrollfragen**

# Selbstkontrollfragen

---

1. Geben Sie die Definition der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse wieder.
2. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse.
3. Geben Sie das Theorem zu weiteren Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten wieder.
4. Geben Sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wieder.
5. Geben Sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit wieder.
6. Geben Sie das Theorem zu gemeinsamen und bedingten Wahrscheinlichkeiten wieder.
7. Geben Sie das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit wieder.
8. Geben Sie das Theorem von Bayes wieder.
9. Geben Sie den Beweis des Theorems von Bayes wieder.
10. Geben Sie die Definition der Unabhängigkeit zweier Ereignisse wieder.
11. Geben Sie das Theorem zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit wieder.
12. Geben Sie den Beweis des Theorems zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit wieder.
13. Erläutern Sie das Theorem zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit.

# Selbstkontrollfragen - Lösungen

---

1. Siehe Definition (Gemeinsame Wahrscheinlichkeit).
2. Siehe Bemerkungen zu Definition (Gemeinsame Wahrscheinlichkeit).
3. Siehe Theorem (Weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten).
4. Siehe Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit). Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gegeben ein anderes Ereignis ist ein Wert in  $[0, 1]$ .
5. Siehe Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit). Die bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben ein Ereignis ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.
6. Siehe Theorem (Gemeinsame und bedingte Wahrscheinlichkeit).
7. Siehe Theorem (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit).
8. Siehe Theorem (Theorem von Bayes).
9. Siehe Beweis zum Theorem (Theorem von Bayes).
10. Siehe Definition (Unabhängige Ereignisse).
11. Siehe Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit).
12. Siehe Beweis zum Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit).
13. Siehe Bemerkungen zum Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit).