Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

Erste Begrifflichkeiten

Wahrscheinlichkeitstheorie

- Ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Zufallsvorgängen
- Ein mathematische Modell zum quantitativen Schlussfolgern über Zufallsvorgänge

Zufallsvorgang

- Ein Phänomen der Wirklichkeit, das nicht mit absoluter Sicherheit vorhersagbar ist
- Ein Phänomen der Wirklichkeit, das für Menschen mit Unsicherheit behaftet sind

Grundannahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie

- Zufallsvorgänge können durch *Wahrscheinlichkeitsräume* modelliert werden
- Mathematik kann zur Vorhersage zufälliger Ereignisse genutzt werden

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \xi : \Omega \to \mathbb{R}$

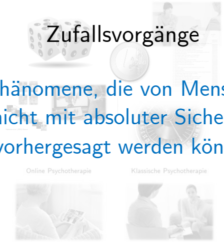
Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_\xi(S) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(S))$

Wirklichkeit

Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.



Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Vorbemerkungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Jede Augenzahl kommt im Mittel gleich häufig vor
Ich denke, jede Augenzahl hat die gleiche Wahrscheinlichkeit

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

$\Omega := \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) := 1/6$

Wirklichkeit

Zufallsvorgang

Werfen eines fairen Würfels

Vorhersagen

Wenn ich nicht weiß, ob eine Augenzahl größer als Drei gefallen ist,
dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl gerade ist $1/2$.

Wenn ich weiß, dass eine Augenzahl größer als Drei gefallen ist, dann
ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl gerade ist $2/3$.

Vorbemerkungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Zur Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

In der Wahrscheinlichkeitstheorie sind Wahrscheinlichkeiten anhand ihrer mathematischen Eigenschaften definiert. Die Interpretation des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist dabei nicht eindeutig.

Es gibt mindestens zwei unterschiedliche Interpretationen:

Nach der *Frequentistischen Interpretation* ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die idealisierte relative Häufigkeit, mit der ein Ereignis unter den gleichen äußeren Bedingungen einzutreten pflegt. Zum Beispiel ist die Frequentistische Interpretation der Aussage "Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/6$ zeigt der Würfel im nächsten Wurf eine Zwei" die folgende: "Wenn man einen Würfel unendlich oft werfen würde und dabei die relative Häufigkeit des Ereignisses, dass der Würfel eine Zwei zeigt, bestimmen würde, dann wäre diese relative Häufigkeit gleich $1/6$".

Nach der *Bayesianischen Interpretation* ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses der Grad der Sicherheit, den eine Beobachter:in aufgrund ihrer subjektiven Einschätzung der Lage dem Eintreten eines Ereignisses zumisst. Zum Beispiel ist die Bayesianische Interpretation der Aussage "Mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/6$ zeigt der Würfel im nächsten Wurf eine Zwei" die folgende: "Basierend auf meiner eigenen und der tradierten Erfahrung mit dem Werfen eines Würfels bin ich mir zu 16.6% sicher, dass der Würfel beim nächsten Wurf eine Zwei zeigt."

In Modellen von tatsächlich zumindest unter ähnlichen Umständen wiederholbaren Zufallsvorgängen wie dem Werfen eines Würfels ist der Unterschied zwischen Frequentistischer und Bayesianischer Interpretation oft eher subtil. Es gibt aber viele Zufallsvorgänge, die mit Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden können, bei denen aufgrund ihrer Einmaligkeit eine Frequentistische Interpretation nicht angemessen ist. Zum Beispiel machen Aussagen der Form "Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die weltweiten Hitzerekorde im Jahr 2023 nicht auf den Klimawandel zurückzuführen sind, ist kleiner als 0.01" nur unter der Bayesianischen Interpretation Sinn, da es sich bei den Temperaturaufzeichnungen des Jahres 2023 nicht um ein wiederholbares Phänomen handelt.

(1) Wahrscheinlichkeitsräume

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Definition

Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Triple $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei

- Ω eine beliebige nichtleere Menge von *Ergebnissen* ω ist und *Ergebnismenge* heißt,
- $\mathcal{A}$ eine σ*-Algebra auf* Ω ist und *Ereignissystem* heißt,
- $\mathbb{P}$ eine Abbildung der Form $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften
    - *Nicht-Negativität* $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$,
    - *Normiertheit* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und
    - σ*-Additivität* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$

  ist und *Wahrscheinlichkeitsmaß* heißt.

Das Tuple $(\Omega, \mathcal{A})$ aus Ergebnismenge und Ereignissystem wird als *Messraum* bezeichnet.

Bemerkung

- Die Definition benutzt den Begriff der σ*-Algebra*.

Definition (σ-Algebra)

Ω sei eine Menge und $\mathcal{A}$ sei eine Menge von Teilmengen von Ω. $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra auf Ω*, wenn

- $\Omega \in \mathcal{A}$ ist,
- $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der Bildung von Komplementärmengen ist, also wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $A^c := \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$ ist,
- $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der abzählbaren Vereinigung von Ereignissen ist, also wenn aus $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ folgt, dass auch $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ist.

Bemerkungen

- Eine σ-Algebra ist eine Menge von Mengen.
- Eine als bekannt vorausgesetzte andere Menge von Mengen ist die *Potenzmenge*.
- Mengen von Mengen heißen auch *Mengensysteme*.

Definition

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“
ZWEITER BAND
3

GRUNDBEGRIFFE DER
WAHRSCHEINLICHKEITS-
RECHNUNG

VON

A. KOLMOGOROFF

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

erniedrigt. Ist jedoch die Anzahl der Behauptungen sehr groß, so lassen sich aus der praktischen Sicherheit jeder einzelnen dieser Behauptungen in bezug auf die Richtigkeit der simultanen Behauptung überhaupt keine Schlüsse ziehen. Deshalb folgt aus dem Prinzip A noch keineswegs, daß bei einer sehr großen Anzahl von Serien von Versuchen, von denen jede Serie aus n Versuchen besteht, in *jeder* Serie der Quotient m/n sich von $\mathsf{P}(A)$ wenig unterscheiden wird.

Bemerkung II. Dem unmöglichen Ereignis (der leeren Menge) entspricht kraft unserer Axiome die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(0) = 0$*, während umgekehrt aus $\mathsf{P}(A) = 0$ die Unmöglichkeit des Ereignisses A durchaus nicht zu folgen braucht; nach dem Prinzip B folgt aus dem Nullwerden der Wahrscheinlichkeit nur, daß bei einer einmaligen Realisation der Bedingungen $\mathfrak{S}$ das Ereignis A praktisch unmöglich ist. Das bedeutet jedoch keineswegs, daß auch bei einer genügend langen Reihe von Versuchen das Ereignis A nicht auftreten wird. Andererseits kann man nach dem Prinzip A nur behaupten, daß bei $\mathsf{P}(A) = 0$ und sehr großem n der Quotient m/n sehr klein wird (er kann z. B. gleich $1/n$ sein).

§ 3. Terminologische Vorbemerkungen.

Wir haben die eigentlichen Objekte unserer weiteren Betrachtungen — die zufälligen Ereignisse — als Mengen definiert. Mehrere mengentheoretische Begriffe bezeichnet man aber in der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit anderen Namen. Wir wollen hier ein kurzes Verzeichnis solcher Begriffe geben.

Mengentheoretisch.	*Im Falle der zufälligen Ereignisse.*
1. A und B sind disjunkt, d. h. $AB = 0$.	1. Die Ereignisse A und B sind unvereinbar.
2. $AB \ldots N = 0$.	2. Die Ereignisse $A, B, \ldots, N$ sind unvereinbar.
3. $AB \ldots N = X$.	3. Das Ereignis X besteht in der gleichzeitigen Realisation aller Ereignisse $A, B, \ldots, N$.
4. $A \dotplus B \dotplus \cdots \dotplus N = X$.	4. Das Ereignis X besteht in der Erscheinung mindestens eines unter den Ereignissen $A, B, \ldots, N$.
5. Die Komplementärmenge $\bar{A}$.	5. Das entgegengesetzte Ereignis $\bar{A}$ besteht in der Nichterscheinung des Ereignisses A.
6. $A = 0$.	6. A ist unmöglich.
7. $A = E$.	7. A muß notwendig vorkommen.

* Vgl. § 3, Formel (3).

8. Ein System $\mathfrak{A}$ der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bildet eine *Zerlegung* der Menge E, wenn $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = E$ ist (das setzt bereits voraus, daß die Mengen A_i paarweise disjunkt sind).	8. Ein *Versuch* $\mathfrak{A}$ besteht darin, daß man feststellt, welches unter den Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vorkommt. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind die möglichen Ausgänge des Versuches $\mathfrak{A}$.
9. B ist eine Untermenge von A: $B \subset A$.	9. Aus der Realisation des Ereignisses B folgt notwendig dieselbe von A.

§ 4. Unmittelbare Folgerungen aus den Axiomen, bedingte Wahrscheinlichkeiten, der Satz von Bayes.

Aus $A + \bar{A} = E$ und den Axiomen IV und V folgt

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}) = 1, \tag{1}$$

$$\mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathsf{P}(A). \tag{2}$$

Da $\bar{E} = 0$ ist, erhält man insbesondere

$$\mathsf{P}(0) = 0. \tag{3}$$

Wenn $A, B, \ldots, N$ unvereinbar sind, so folgt aus dem Axiom IV die Formel

$$\mathsf{P}(A + B + \cdots + N) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \cdots + \mathsf{P}(N) \tag{4}$$

(der Additionssatz).

Wenn $\mathsf{P}(A) > 0$ ist, so nennt man den Quotienten

$$\mathsf{P}_A(B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)} \tag{5}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses B unter der Bedingung A. Aus (5) folgt unmittelbar

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}_A(B). \tag{6}$$

Ein Induktionsschluß ergibt sodann die allgemeine Formel

$$\mathsf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}_{A_1}(A_2)\,\mathsf{P}_{A_1 A_2}(A_3) \ldots \mathsf{P}_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n) \tag{7}$$

(der Multiplikationssatz).

Man beweist auch leicht folgende Formeln:

$$\mathsf{P}_A(B) \geqq 0, \tag{8}$$

$$\mathsf{P}_A(E) = 1, \tag{9}$$

$$\mathsf{P}_A(B + C) = \mathsf{P}_A(B) + \mathsf{P}_A(C). \tag{10}$$

Vergleicht man diese Formeln (8) bis (10) mit den Axiomen III bis V, so ergibt sich, daß *das Mengensystem* $\mathfrak{F}$ *mit der Mengenfunktion* $\mathsf{P}_A(B)$

“Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik [Mengen, Abbildungen] einzuordnen.”

“Wir haben die eigentlichen Objekte unserer weiteren Betrachtungen - die zufälligen Ereignisse - als Mengen definiert.”

Kolmogoroff (1933) [*1903 †1987]

Definition

Ergebnismenge Ω

- Wir betrachten zunächst *endliche Wahrscheinlichkeitsräume* mit $|\Omega| < \infty$.
- Ω habe also nur endlich viele ("diskrete") Elemente.
- Zum Modellieren des Werfen eines Würfels definiert man z.B. $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells

- Wir stellen uns sequentielle *Durchgänge* eines *Zufallsvorgangs* vor.
- In jedem Durchgang wird genau ein ω aus Ω mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{\omega\})$ *realisiert*.
- $\mathbb{P}(\{\omega\})$ bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ω in einem Durchgang aus Ω realisiert wird.
- Beim Modell des Werfens eines fairen Würfels gilt etwa $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/6$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Im 1. Durchgang wird z.B. "4" realisiert, im 2. Durchgang "1", im 3. Durchgang "5", usw.

Ereignisse $A \in \mathcal{A}$

- *Ereignisse* stellt man sich am besten als Zusammenfassung (ein oder) mehrerer Ergebnisse vor.
- Beim Werfen eines Würfels sind mögliche Ereignisse zum Beispiel

Es fällt eine gerade Augenzahl,	das heißt $\omega \in \{2, 4, 6\}$
Es fällt eine Augenzahl größer als Zwei,	das heißt $\omega \in \{3, 4, 5, 6\}$
Es fällt eine Eins oder eine Fünf,	das heißt $\omega \in \{1, 5\}$

- Natürlich sind auch die Ergebnisse $\omega \in \Omega$ mögliche Ereignisse zum Beispiel

Es fällt eine Eins,	das heißt $\omega \in \{1\}$
Es fällt eine Sechs,	das heißt $\omega \in \{6\}$

- Betrachtet man $\omega \in \Omega$ als Ereignis, so nennt man es *Elementarereignis* und schreibt $\{\omega\}$.

"Wir haben die eigentlichen Objekte unserer weiteren Betrachtungen - die zufälligen Ereignisse - als Mengen definiert."

Kolmogoroff (1933) [*1903 †1987]

Definition

Ereignissystem $\mathcal{A}$

- Sinn des Ereignissystems ist es, alle Ereignisse, die sich basierend auf einer gegebenen Ergebnismenge bei Auswahl eines $\omega \in \Omega$ ergeben können, mathematisch zu repräsentieren.
- Das Ereignissystem $\mathcal{A}$ ist die vollständige Menge aller möglichen Ereignisse bei gegebenem Ω.
- Die Forderung, dass $\mathcal{A}$ die σ-Algebra Kriterien erfüllt, begründet sich wie folgt
  - Es soll sichergestellt sein, dass $\omega \in \Omega$ für beliebiges ω, dass also irgendein Ergebnis realisiert wird, eines der möglichen Ereignisse ist. Dies entspricht $\Omega \in \mathcal{A}$. Zu jedem Ereignis soll es auch möglich sein, dass dieses Ereignis gerade nicht eintritt. Dies entspricht, dass aus $A \in \mathcal{A}$ folgen soll, dass $A^c = \Omega \setminus A$ auch in $\mathcal{A}$ ist. Dies impliziert auch, dass $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{A}$. Ein Ereignis ist also, dass kein Elementarereignis eintritt, allerdings passiert dies nur mit Wahrscheinlichkeit Null, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Es tritt also sicher immer ein Elementarereignis ein. Die Kombination von Ereignissen soll auch immer ein Ereignis sein, z.B. "Es fällt eine gerade Zahl" und/oder "Es fällt eine Zahl größer 2". Dies entspricht, dass aus $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ folgen soll, dass auch $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
- Für endliches Ω und für $\Omega := \mathbb{R}$ sind passende Ereignissysteme schon lange bekannt.

$$
\begin{aligned}
\Omega \text{ ist endlich} \quad & \Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die Potenzmenge von } \Omega \\
\Omega \text{ ist } \mathbb{R} \quad & \Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die } \textit{Borelsche } \sigma\textit{-Algebra } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
\Omega \text{ ist } \mathbb{R}^n \quad & \Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die } \textit{Borelsche } \sigma\textit{-Algebra } \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

Theorem (Ereignissystem bei endlicher Ergebnismenge)

$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sei eine endliche Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω eine σ-Algebra auf Ω und damit ein geeignetes Ereignisssytem im Wahrscheinlichkeitsraummodell.

Beweis

Die Potenzmenge von Ω ist die Menge aller Teilmengen von Ω. Wir überprüfen die σ-Algebra Eigenschaften. Zunächst gilt, dass Ω selbst eine der Teilmengen von Ω ist, also ist die erste σ-Algebra Eigenschaft erfüllt. Sei nun A eine Teilmenge von Ω. Dann ist auch $A^c = \Omega \setminus A$ eine Teilmenge von Ω und somit ist auch die zweite σ-Algebra Eigenschaft erfüllt. Schließlich betrachten wir die Vereinigung von n Teilmengen $A_1, A_2, ..., A_n \subseteq \Omega$. Dann ist $\cup_{i=1}^n A_i$ die Menge der $\omega \in \Omega$ für die gilt, dass $\omega \in A_1$ und/oder $\omega \in A_2$ ... und/oder $\omega \in A_n$. Da für alle diese ω gilt, dass $\omega \in \Omega$ ist also auch $\cup_{i=1}^n A_i$ eine Teilmenge von Ω und damit auch die dritte σ-Algebra Eigenschaft erfüllt.

Definition

Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$

- $(\Omega, \mathcal{A})$ ist die *strukturelle Basis* eines Wahrscheinlichkeitsraummodells.
- $\mathbb{P}$ repräsentiert die probabilistischen Charakteristika eines Wahrscheinlichkeitsraummodells.
- $\mathbb{P}$ entspricht also der *funktionellen Basis* eines Wahrscheinlichkeitsraummmodells.
- Es gilt $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$, $\mathbb{P}$ ordnet also (nur) Mengen Wahrscheinlichkeiten zu.
- Mit $\{\omega\} \in \mathcal{A} \,\forall\, \omega \in \Omega$ ordnet $\mathbb{P}$ auch den Elementareignissen Wahrscheinlichkeiten zu.
- Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen in $[0,1]$, nicht Prozente (20%) oder Verhältnisse (50:50).
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ entspricht der Tatsache, dass in jedem Durchgang sicher $\omega \in \Omega$ gilt.
- In jedem Durchgang eines Zufallsvorgangs tritt also zumindest ein Elementarereignis ein.

Definition

σ-Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$

- Die σ-Additivität von $\mathbb{P}$ erlaubt es, aus bereits bekannten Ereigniswahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeiten anderer Ereignisse zu berechnen.
- Die σ-Additivität ist also die Grundlage für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, das heißt für die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*.
- Man kann basierend auf einer Definition von $\Omega, \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}$ also Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraummodells berechnen. Ob diese Wahrscheinlichkeiten aber tatsächlich etwas mit den realen Ereignissen in einem Zufallsvorgang zu tun haben, kommt darauf an, ob die Modellierung einigermaßen gelungen ist oder nicht.
- Die hergeleiteten Wahrscheinlichkeiten werden zumindest nach den Regeln der Vernunft, also der Logik und der Mathematik, d.h. rational bestimmt.
- Insgesamt erlaubt das Wahrscheinlichkeitsmodell also das modellbasierte schlussfolgernde Denken über mit Unsicherheit behaftete Phänomene

Probability Theory $\Leftrightarrow$ Reasoning with Uncertainty

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Theorem (Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0. \tag{1}$$

Beweis

Für $i = 1, 2, ...$ sei $A_i := \emptyset$. Dann ist $A_1, A_2, ...$ eine Folge disjunkter Ereignisse, weil gilt, dass $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ und es ist $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. Mit der σ-Additivität von $\mathbb{P}$ folgt dann, dass

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\emptyset\right) \tag{2}$$

Das unendliche Aufaddieren der Zahl $\mathbb{P}(\emptyset) \in [0, 1]$ soll also wieder $\mathbb{P}(\emptyset)$ ergeben. Dies ist aber nur möglich, wenn $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

$\square$

Theorem (σ-Additivität bei endlichen Folgen disjunkter Ereignisse)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, ..., A_n$ sei eine endliche Folge paarweise disjunkter Ereignisse. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \tag{3}$$

<u>Beweis</u>

Wir betrachten eine unendliche Folge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, ...$ wobei für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten soll, dass $A_i := \emptyset$ für $i > n$. Dann gilt mit der σ-Additivität von $\mathbb{P}$ zunächst, dass

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(A_i\right) + \sum_{i=n+1}^\infty \mathbb{P}\left(A_i\right). \tag{4}$$

Mit $\mathbb{P}\left(A_i\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ für $i = n+1, n+2, ...$ folgt dann direkt

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(A_i\right) + 0 = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(A_i\right). \tag{5}$$

$\square$

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Definition (Wahrscheinlichkeitsfunktion)

Ω sei eine endliche Menge. Dann heißt eine Funktion $\pi : \Omega \to [0,1]$ *Wahrscheinlichkeitsfunktion*, wenn gilt, dass

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1. \tag{6}$$

Sei weiterhin $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann heißt die durch

$$\pi : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \pi(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}) \tag{7}$$

definierte Funktion *Wahrscheinlichkeitsfunktion* von $\mathbb{P}$ auf Ω.

Bemerkungen

- Wahrscheinlichkeitsfunktion erlauben im Falle endlicher Ergebnismengen das Festlegen von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch die Definition der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse.
- Über alle Eingabewerte $\omega \in \Omega$ summieren die Funktionswerte $\pi(\omega)$ zu 1.
- Weil $\mathbb{P}$ per Definition σ-additiv ist, gilt insbesondere auch

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1. \tag{8}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Theorem (Definition eines W-Maßes durch eine W-Funktion)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge und $\pi : \Omega \to [0,1]$ sei eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf Ω mit π als Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathbb{P}$. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß ist definiert als

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \pi(\omega). \tag{9}$$

Bemerkung

- Bei endlichem Ω können die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\pi(\omega)$ berechnet werden.

Beweis

Wir überprüfen zunächst die Wahrscheinlichkeitsmaßeigenschaften von $\mathbb{P}$. Weil $\pi(\omega) \in [0,1]$ für alle $\omega \in \Omega$, gilt auch immer $\sum_{\omega \in A} \pi(\omega) \geq 0$ und damit die Nicht-Negativität von $\mathbb{P}$. Ferner folgt wie oben gesehen mit der Normiertheit von π direkt die Normiertheit von $\mathbb{P}$. Seien nun $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{\omega \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i} \pi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} \pi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \tag{10}$$

und damit die σ-Addivität von $\mathbb{P}$. $\square$

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Aus dem bis hierin Gesagtem lässst sich nun zusammenfassend folgendes Vorgehen zur Modellierung eines Zufallsvorganges mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ festhalten:

(1) In einem ersten Schritt überlegt man sich eine sinnvolle Definition der Ergebnismenge Ω, also der Ergebnisse bzw. Elementarereignisse die in jedem Durchgang des Zufallsvorgangs realisiert werden sollen.

(2) In einem zweiten Schritt wählt man dann ein geignetes Ereignissystem; im Falle einer endlichen Ergebnismenge bietet sich die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ an, im Falle der überabzählbaren Ergebnismenge $\Omega := \mathbb{R}$ bietet sich die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ an.

(3) Schließlich definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten aller möglichen Ereignisse repräsentiert. Im Falle einer endlichen Ergebnismenge gelingt dies inbesondere wie oben beschrieben durch Definition der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse. In der Folge verdeutlichen wir dieses Vorgehen anhand von Beispielen. Im Falle der überabzählbaren Ergebnismenge $\Omega := \mathbb{R}$ bietet sich die Definition von $\mathbb{P}$ mithilfe von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen an, wie wir später sehen werden.

Beispiele

Würfeln mit einem Würfel

Wir modellieren das Werfen eines Würfels. Es ist sicherlich sinnvoll, die Ergebnismenge als $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zu definieren. Allerdings wäre auch die Definition von $\Omega := \{\cdot, \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\}$ in äquivalenter Weise möglich.

Da es sich um eine endliche Ergebnismenge handelt, wählen wir als σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{A}$ enthält dann automatisch alle möglichen Ereignisse. Die Kardinalität von $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$. In untenstehender Tabelle listen wir sechs dieser 64 Ereignisse in ihrer verbalen Beschreibung und als Teilmenge A von Ω.

Table 1: Ausgewählte Ereignisse beim Modell des Werfen eines Würfels

Beschreibung	Mengenform
Es fällt eine beliebige Augenzahl	$\omega \in A = \Omega$
Keine Augenzahl fällt	$\omega \in A = \emptyset$
Es fällt eine Augenzahl größer als 4	$\omega \in A = \{5, 6\}$
Es fällt eine gerade Augenzahl	$\omega \in A = \{2, 4, 6\}$
Es fällt eine Sechs	$\omega \in A = \{6\}$
Eine Eins, eine Drei oder eine Sechs fällt	$\omega \in A = \{1, 3, 6\}$

Damit ist die Definition des Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ in der Modellierung des Werfens eines Würfels abgeschlossen.

Würfeln mit einem Würfel (fortgesetzt)

Wie oben beschrieben kann das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ durch Festlegung von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Für das Modell eines unverfälschten Würfels würde man

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} := 1/6 \text{ für alle } \omega \in \Omega \tag{11}$$

wählen. Für ein Modell eines verfälschten Würfels, der das Werfen einer Sechs bevorzugt, könnte man zum Beispiel definieren, dass

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{8} \text{ für } \omega \in \{1,2,3,4,5\} \text{ und } \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{3}{8}. \tag{12}$$

Im Fall des unverfälschten Würfel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis “Es fällt eine gerade Augenzahl” mit der σ-Additivät von $\mathbb{P}$ zu

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}. \tag{13}$$

Im Fall des obigen Modells eines verfälschten Würfels ergibt sich für das gleiche Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}. \tag{14}$$

Beispiele

Gleichzeitiges Würfeln mit einem blauen und einem roten Würfel

Wir wollen nun das gleichzeitige Werfen eines blauen und eines roten Würfels modellieren. Dazu ist es sinnvoll, die Ergebnismenge als

$$\Omega := \{(r,b)|r \in \{1,2,3,4,5,6\}, b \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \tag{15}$$

mit Kardinalität $|\Omega| = 36$ zu definieren, wobei r die Augenzahl des blauen Würfels und b die Augenzahl des roten Würfels repräsentieren soll.

Wiederum bietet sich die Wahl der Potenzmenge von Ω als σ-Algebra an, wir definieren also wieder $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Die Anzahl der in diesem Modell möglichen Ereignisse ergibt sich zu $|\mathcal{A}| = 2^{|\Omega|} = 2^{36} = 68.719.476.736$. In untenstehender Tabelle listen wir sechs dieser Ereignisse in ihrer verbalen Beschreibung und als Teilmenge A von Ω.

Table 2: Ausgewählte Ereignisse beim Modell des Werfens eines roten und eines blauen Würfels

Beschreibung	Mengenform
Auf dem roten Würfel fällt eine Drei	$\omega \in A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$
Auf dem blauen Würfel fällt eine Drei	$\omega \in A = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\}$
Auf beiden Würfeln fällt eine Drei	$\omega \in A = \{(3,3)\}$
Es fällt eine Pasch	$\omega \in A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
Die Summe der gefallenen Zahlen ist Vier	$\omega \in A = \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$

Beispiele

Gleichzeitiges Würfeln mit einem blauen und einem roten Würfel (fortgesetzt)

Die Definition des Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist damit abgeschlossen. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann wiederum durch Definition von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Für das Modell zweier unverfälschter Würfel würde man

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \text{ für alle } \omega \in \Omega \tag{16}$$

wählen. Unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaße ergibt sich dann zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Die Summe der gefallenen Zahlen ist Vier" mit der σ- Additivät von $\mathbb{P}$ zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{(1,3)\} \cup \{(3,1)\} \cup \{(2,2)\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{(1,3)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(3,1)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(2,2)\}\right) \\
&= 1/36 + 1/36 + 1/36 \\
&= 1/12.
\end{aligned}$$

Beispiele

Werfen einer Münze

Wir modellieren das Werfen einer Münze, deren eine Seite Kopf (heads) und deren andere Seite Zahl (tails) zeigt. Es ist sinnvoll, die Ergebnismenge als $\Omega := \{H, T\}$ zu definieren, wobei H "Heads" und T "Tails" repräsentiert. Allerdings wäre auch jede andere binäre Definition von Ω möglich, z.B. $\Omega := \{0, 1\}, \Omega := \{-1, 1\}$ oder $\Omega := \{1, 2\}$.

Die Potenzmenge $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ enthält alle möglichen Ereignisse. In diesem Fall können wir das gesamte Mengensystem $\mathcal{A}$ sehr leicht komplett auflisten.

Table 3: Ereignissystem $\mathcal{A}$ beim Modell des Werfens einer Münze

Beschreibung	Mengenform
Weder Kopf noch Zahl fällt	$\omega \in A = \emptyset$
Kopf fällt	$\omega \in A = \{H\}$
Zahl fällt	$\omega \in A = \{T\}$
Kopf oder Zahl fällt	$\omega \in A = \{H, T\}$

Die Definition des Messraums $(\Omega, \mathcal{A})$ ist damit abgeschlossen.

Werfen einer Münze (fortgesetzt)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann wiederum durch Definition von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Die Normiertheit von Ω bedingt hier insbesondere, dass

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{H\}) + \mathbb{P}(\{T\}) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = 1 - \mathbb{P}(\{H\}). \tag{17}$$

Bei Festlegung der Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\{H\}$ wird also die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignis $\{T\}$ sofort mit festgelegt (andersherum natürlich ebenso). Für das Modell einer fairen Münze würde man $\mathbb{P}(\{H\}) = \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2$ wählen. Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse ergeben in diesem Fall zu

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\{H\}) = 1/2, \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2 \text{ und } \mathbb{P}(\{H, T\}) = 1. \tag{18}$$

Beispiele

Gleichzeitiges Werfen von zwei Münzen

Wir modellieren das gleichzeitige Werfen zweier Münzen. Basierend auf dem Modell des einfachen Münzwurfs ist es sinnvoll, die Ergebnismenge als $\Omega := \{HH, HT, TH, TT\}$ zu definieren. Die Potenzmenge $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ enthält wiederum alle $2^{|\Omega|} = 2^4 = 16$ möglichen Ereignisse. In untenstehender Tabelle listen wir vier davon.

Table 4: Ausgewählte Ereignisse beim Modell des zweifachen Werfens einer Münze

Beschreibung	Mengenform
Kopf fällt im ersten Wurf	$\omega \in A = \{HH, HT\}$
Kopf fällt im zweiten Wurf	$\omega \in A = \{HH, TH\}$
Kopf fällt nicht	$\omega \in A = \{TT\}$
Zahl fällt mindestens einmal	$\omega \in A = \{HT, TH, TT\}$

Die Definition des Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ ist damit abgeschlossen. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann wiederum durch Definition von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden. Für das Modell zweier fairer Münzen könnte man etwa

$$\mathbb{P}(\{HH\}) = \mathbb{P}(\{HT\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = \mathbb{P}(\{TT\}) = \frac{1}{4} \tag{19}$$

wählen.

Definition

Erste Eigenschaften

Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Beispiele

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie den Begriff des Zufallsvorgangs.
2. Geben Sie die Definition des Begriffs der σ-Algebra wieder.
3. Geben Sie die Definition des Begriffs des Wahrscheinlichkeitsmaßes wieder.
4. Geben Sie die Definition des Begriffs des Wahrscheinlichkeitsraums wieder.
5. Erläutern Sie den Begriff der Ergebnismenge Ω.
6. Erläutern Sie die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells.
7. Erläutern Sie den Begriff eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$.
8. Erläutern Sie den Begriff des Ereignissystems $\mathcal{A}$.
9. Welche σ-Algebra wählt man sinnvoller Weise für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge?
10. Erläutern Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$.
11. Geben Sie die Definition des Begriffs der Wahrscheinlichkeitsfunktion wieder.
12. Warum ist der Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion bei der Modellierung eines Zufallsvorgans durch einen Wahrscheinlichkeitsraums mit endlicher Ergebnismenge hilfreich?
13. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens eines Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
14. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens eines roten und eines blauen Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

Selbstkontrollfragen - Lösungen

1. Ein Zufallsvorgang ist ein Phänomen der Wirklichkeit, das nicht mit absoluter Sicherheit vorhersagbar ist bzw. für Menschen mit Unsicherheit behaftet ist. Siehe Folie 2 Erste Begrifflichkeiten.
2. Siehe Definition (σ-Algebra).
3. Siehe Definition (Wahrscheinlichkeitsraum) bezüglich $\mathbb{P}$.
4. Siehe Definition (Wahrscheinlichkeitsraum).
5. Die Ergebnismenge enthält die in einem Durchgang des modellierten Zufallsvorgangs möglichen Elementarereignisse, siehe Folie 12 Ergebnismenge Ω und Die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells.
6. Siehe Folie 12 Die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells.
7. Siehe Folie 13 Ereignisse $A \in \mathcal{A}$.
8. Siehe Folie 14 Ereignissystem $\mathcal{A}$.
9. Die Potenzmenge der Ergebnismenge, sie enthält alle prinzipiell möglichen Ereignisse, siehe auch Theorem (Ereignissystem bei endlicher Ergebnismenge).
10. Siehe Folie 16 Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$.
11. Siehe Definition (Wahrscheinlichkeitsfunktion).
12. Durch Definition der Funktionswerte einer Wahrscheinlichkeitsfunktion kann ein Wahrscheinlichkeitsmaß festgelegt werden, siehe auch die Beispiele auf Folien 25 - 32.
13. Siehe Folien 26 und 27 Würfeln mit einem Würfel.
14. Siehe Folien 28 und 29 Gleichzeitiges Würfeln mit einem blauen und einem roten Würfel.

Referenzen

Kolmogoroff, A. 1933. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-49888-6.