Programmierung und Deskriptive Statistik

BSc Psychologie WiSe 2023/24

Belinda Fleischmann

Datum	Einheit	Thema
11.10.23	Einführung	(1) Einführung
18.10.23	R Grundlagen	(2) R und Visual Studio Code
25.10.23	R Grundlagen	(2) R und Visual Studio Code
01.11.23	R Grundlagen	(3) Vektoren
08.11.23	R Grundlagen	(4) Matrizen
15.11.23	R Grundlagen	(5) Listen und Dataframes
22.11.23	R Grundlagen	(6) Datenmanagement
29.11.23	Deskriptive Statistik	(7) Häufigkeitsverteilungen
06.12.23	**Deskriptive Statistik**	**(8) Verteilungsfunktionen und Quantile**
13.12.23	Deskriptive Statistik	(9) Maße der zentralen Tendenz
20.12.23	*Leistungsnachweis Teil 1*	
20.12.23	Deskriptive Statistik	(10) Maße der Datenvariabilität
	Weihnachtspause	
10.01.24	Deskriptive Statistik	(11) Anwendungsbeispiel (Deskriptive Statistik)
17.01.24	Inferenzstatistik	(12) Anwendungsbeispiel (Parameterschätzung, Konfidenzintervalle)
24.01.24	Inferenzstatistik	(13) Anwendungsbeispiel (Hypothesentest)
25.01.24	*Leistungsnachweis Teil 2*	

(8) Verteilungsfunktionen und Quantile

Empirische Verteilungsfunktionen

Quantile und Boxplots

Übungen und Selbstkontrollfragen

Empirische Verteilungsfunktionen

Quantile und Boxplots

Übungen und Selbstkontrollfragen

Definition (Kumulative absolute und relative Häufigkeitsverteilungen)

$x = (x_1, ..., x_n)$ sei ein Datensatz, $A := \{a_1, ..., a_k\}$ mit $k \le n$ die im Datensatz vorkommenden verschiedenen Zahlenwerte und h und r die absoluten und relativen Häufigkeitsverteilungen von x, respektive. Dann heißt die Funktion

$$H : A \to \mathbb{N}, a \mapsto H(a) := \sum_{a' \le a} h(a') \tag{1}$$

die *kumulative absolute Häufigkeitsverteilung* von x und die Funktion

$$R : A \to [0,1], a \mapsto R(a) := \sum_{a' \le a} r(a') \tag{2}$$

die *kumulative relative Häufigkeitsverteilung* der Zahlwerte von x.

Bemerkung

- Mit den Definitionen der absoluten und relativen Häufigkeitsverteilungen gilt also

$$H(a) = \text{Anzahl der } x_i \text{ aus } x \text{ mit } x_i \le a \tag{3}$$

und

$$R(a) = \text{Anzahl der } x_i \text{ aus } x \text{ mit } x_i \le a \text{ geteilt durch } n. \tag{4}$$

Evaluation kumulativer Summen

In R können kumulative Summen mit `cumsum()` berechnet werden.

Evaluation am Beispiel der Pre.BDI-Werte:

```r
# Einlesen des Beispieldatensatzes und Abbildungsverzeichnisdefinition
fpath    <- file.path(data_path, "psychotherapie_datensatz.csv")
D        <- read.table(fpath, sep = ",", header = T)

# Evaluation der absoluten und relativen Häufigkeitsverteilugen von Pre.BDI
x        <- D$Pre.BDI                # Double vector der Pre.BDI Werte
n        <- length(x)                # Anzahl der Datenwerte
H        <- as.data.frame(table(x))  # absolute Häufigkeitsverteilung als Dataframe
names(H) <- c("a", "h")              # Spaltenbenennung
H$H      <- cumsum(H$h)              # kumulative absolute Häufigkeitsverteilung
H$r      <- H$h/n                    # relative Häufigkeitsverteilung
H$R      <- cumsum(H$r)              # kumulative relative Häufigkeitsverteilung
print(H)
```

```
    a  h   H    r    R
1  14  1   1 0.01 0.01
2  15  3   4 0.03 0.04
3  16  6  10 0.06 0.10
4  17 17  27 0.17 0.27
5  18 21  48 0.21 0.48
6  19 20  68 0.20 0.68
7  20 17  85 0.17 0.85
8  21 12  97 0.12 0.97
9  22  2  99 0.02 0.99
10 23  1 100 0.01 1.00
```

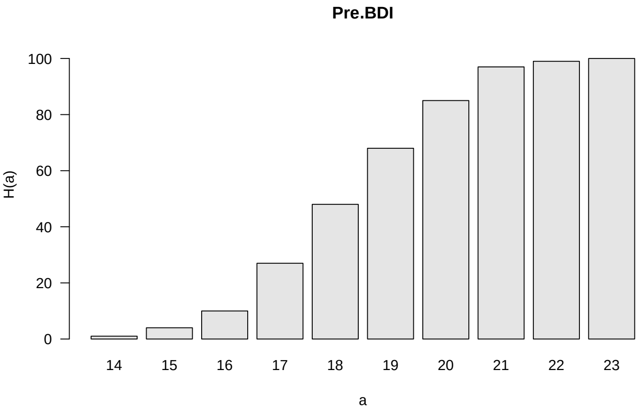
Visualisierung kumulativer Häufigkeiten

Kumulative absolute Häufigkeitsverteilung der Pre.BDI Werte

```
# Vorbereitung der zu visualisierenden Daten
Ha        <- H$H           # H(a) Werte
names(Ha) <- H$a           # barplot braucht a Werte als names

# Visualisierung der kumulativen absoluten Häufigkeitsverteilung
graphics.off()             # Alle offenen graphical devices schließen
dev.new()                  # Abbildungsinitialisierung

barplot(                   # Balkendiagramm
  Ha,                      # H(a) Werte als input
  col  = "gray90",         # Balkenfarbe
  xlab = "a",              # x Achsenbeschriftung
  ylab = "H(a)",           # y Achsenbeschriftung
  ylim = c(0,110),         # y Achsenlimits
  las  = 1,                # Achsenticklabelorientierung
  main = "Pre.BDI"         # Titel
)

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
  file   = file.path(fdir, "pds_8_kh.pdf"),
  width  = 8,
  height = 5
)
```

Visualisierung kumulativer Häufigkeiten

Kumulative absolute Häufigkeitsverteilung der Pre.BDI Werte



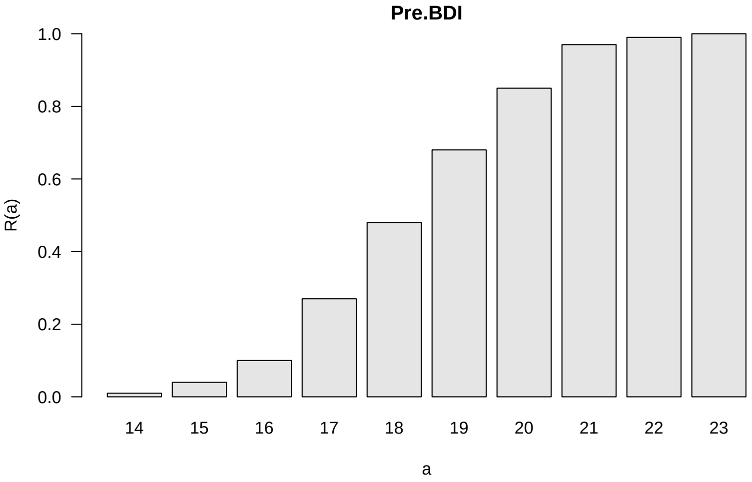
Visualisierung kumulativer Häufigkeiten

Kumulative relative Häufigkeitsverteilung der Pre.BDI Werte

```
# Vorbereitung der zu visualisierenden Daten
R        <- H$R             # R(a) Werte
names(R) <- H$a             # barplot braucht a Werte als names

# Visualisierung der kumulativen relativen Häufigkeitsverteilung
graphics.off()              # Alle offenen graphical devices schließen
dev.new()                   # Abbildungsinitialisierung

barplot(                    # Balkendiagramm
  R,                        # R(a) Werte
  col  = "gray90",          # Balkenfarbe
  xlab = "a",               # x Achsenbeschriftung
  ylab = "R(a)",            # y Achsenbeschriftung
  ylim = c(0,1),            # y Achsenlimits
  las  = 1,                 # Achsenticklabelorientierung
  main = "Pre.BDI"          # Titel
)

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
  file   = file.path(fdir, "pds_8_kr.pdf"),
  width  = 8,
  height = 5
)
```

Visualisierung kumulativer Häufigkeiten

Kumulative relative Häufigkeitsverteilung der Pre.BDI Werte



Empirische Verteilungsfunktionen

Definition (Empirische Verteilungsfunktion)

$x = (x_1, ..., x_n)$ sei ein Datensatz. Dann heißt die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1], \xi \mapsto F(\xi) := \frac{\text{Anzahl der } x_i \text{ aus } x \text{ mit } x_i \leq \xi}{n} \tag{5}$$

die empirische Verteilungsfunktion (EVF) von x.

Bemerkungen

- Die empirische Verteilungsfunktion wird auch *empirische kumulative Verteilungsfunktion* genannt.
- Die Definitionsmenge der EVF ist im Gegensatz zu Häufigkeitsverteilungen $\mathbb{R}$ und nicht A
- Die EVF verhält sich zu kumulativen Häufigkeitsverteilungen wie Histogramme zu Häufigkeitsverteilungen.
- Typischerweise sind empirische Verteilungsfunktionen Treppenfunktionen.
- Die (visuelle) Umkehrfunktion der EVF kann zur Bestimmung von Quantilen genutzt werden.

Evaluation und Visualisierung der EVF mit `ecdf()`

`ecdf()` evaluiert die empirischen Verteilungsfunktion eines Datensatzes.

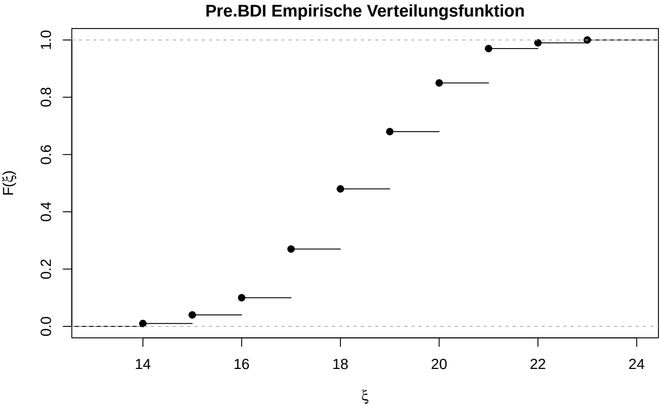
`plot()` kann mit ecdf object umgehen.

Empirische Verteilungsfunktion am Beispiel der Pre.BDI Werte

```
x    <- D$Pre.BDI                                    # double vector der Pre.BDI Werte
evf  <- ecdf(x)                                      # Evaluation der EVF

# Visualisierung der kumulativen relativen Häufigkeitsverteilung
library(latex2exp)                                   # TeX Formatierungstool laden
graphics.off()                                       # Alle offenen graphical devices schließen
dev.new()                                            # Abbildungsinitialisierung

plot(
  evf,                                               # ecdf Objekt
  xlab = TeX("$\\xi$"),                              # x Achsenbeschriftung
  ylab = TeX("$F(\\xi)$"),                           # y Achsenbeschriftung
  main = "Pre.BDI Empirische Verteilungsfunktion" # Titel
)

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
  file   = file.path(fdir, "pds_8_ecdf.pdf"),
  width  = 8,
  height = 5)
```

Empirische Verteilungsfunktionen

Empirische Verteilungsfunktion der Pre.BDI Werte



Empirische Verteilungsfunktionen

Quantile und Boxplots

Übungen und Selbstkontrollfragen

Das p-Quantil

Definition (p-Quantil)

$x = (x_1, ..., x_n)$ sei ein Datensatz und

$$x_s = \left(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right) \text{ mit } \min_{1 \le i \le n} x_i = x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)} = \max_{1 \le i \le n} x_i \tag{6}$$

der zugehörige aufsteigend sortierte Datensatz. Weiterhin bezeichne $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion.Dann heißt für ein $p \in [0, 1]$ die Zahl

$$x_p := \begin{cases} x_{(\lfloor np+1 \rfloor)} & \text{falls } np \neq \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(np)} + x_{(np+1)}\right) & \text{falls } np \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{7}$$

das p-*Quantil* von x.

Bemerkungen

- Mindestens $p \cdot 100\%$ aller Werte in x sind kleiner oder gleich x_p.
- Mindestens $(1 - p) \cdot 100\%$ aller Werte in x sind größer als x_p .
- Das p-Quantil teilt den geordneten Datensatz im Verhältnis p zu $(1 - p)$ auf.
- $x_{0.25}, x_{0.50}, x_{0.75}$ heißen *unteres Quartil*, *Median*, und *oberes Quartil*, respektive.
- $x_{j \cdot 0.10}$ für $j = 1, ..., 9$ heißen *Dezile*,
- $x_{j \cdot 0.01}$ für $j = 1, ..., 99$ heißen *Percentile*.

Beispiel p-Quantil

Datensatz und sortierter Datensatz

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	8.5	1.5	75	4.5	6.0	3.0	3.0	2.5	6.0	9.0
$x_{(i)}$	1.5	2.5	3.0	3.0	4.5	6.0	6.0	8.5	9.0	75

0.25-Quantil

Es ist $n = 10$ und es sei $p := 0.25$. Dann gilt $np = 10 \cdot 0.25 = 2.5 \notin \mathbb{N}$. Also folgt

$$x_{0.25} = x_{(\lfloor 2.5+1 \rfloor)} = x_{(3)} = 3.0 \tag{8}$$

0.80-Quantil

Es ist $n = 10$ und es sei $p := 0.80$. Dann gilt $np = 10 \cdot 0.80 = 8 \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$x_{0.80} = \frac{1}{2}\left(x_{(8)} + x_{(8+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{(8)} + x_{(9)}\right) = \frac{8.5 + 9.0}{2} = 8.75. \tag{9}$$

(Henze (2018), Kapitel 5)

Quantilsbestimmung in R

"Manuelle" Quantilbestimmung anhand obiger Definition

```
x    <- c(8.5, 1.5, 12, 4.5, 6.0, 3.0, 3.0, 2.5, 6.0, 9.0)  # Beispieldaten (Henze, 2018)
n    <- length(x)                                          # Anzahl Datenwerte
x_s  <- sort(x)                                            # sortierter Datensatz
p    <- 0.25                                               # np \notin \mathbb{N}
x_p  <- x_s[floor(n*p + 1)]                                # 0.25 Quantil
print(x_p)                                                 # Ausgabe
```

```
[1] 3
```

```
p    <- 0.80                                               # np \in \mathbb{N}
x_p  <- (1/2)*(x_s[n*p] + x_s[n*p + 1])                    # 0.80 Quantil
print(x_p)                                                 # Ausgabe
```

```
[1] 8.75
```

Quantilsbestimmung mithilfe vordefinierter R-Funktionen

`quantile()` wertet Quantile anhand der Quantildefinition `type` aus.

Es gibt mindestens neun verschiedene Quantildefinitionen (cf. Hyndman and Fan (1996))

```
# | label: alternat. Quantils types
x_p <- quantile(x, 0.80, type = 1)                         # 0.80 Quantil, Definition 1
print(x_p)
```

```
80%
8.5
```

```
x_p <- quantile(x, 0.80, type = 2)                         # 0.80 Quantil, Definition 2
print(x_p)
```

```
 80%
8.75
```

Visuelle Bestimmung des Quantils

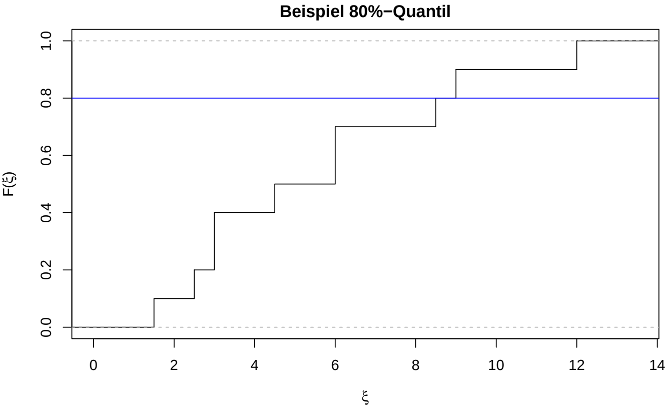
Kombination von `ecdf()`und `abline()` erlaubt prinzipiell die visuelle Bestimmung von Quantilen

EVF und 80%-Quantil der Beispieldaten aus Henze, 2018

```r
library(latex2exp)                         # TeX Formatierungstool laden
graphics.off()                             # Alle offenen graphical devices schließen
dev.new()                                  # Abbildungsinitialisierung

evf <- ecdf(x)                             # Evaluation der EVF

plot(                                      # plot() weiß mit ecdf object umzugehen
  evf,                                     # ecdf Objekt
  xlab      = TeX("$\\xi$"),               # x Achsenbeschriftung
  ylab      = TeX("$F(\\xi)$"),            # y Achsenbeschriftung
  verticals = TRUE,                        # vertikale Linien
  do.points = FALSE,                       # keine Punkte
  main      = "Beispiel 80%-Quantil"       # Titel
)

abline(                                    # horizontale Linie
  h = 0.80,                                # y Ordinate der Linie
  col = "blue"                             # Farbe der Linie
)

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
  file   = file.path(fdir, "pds_8_ecdf_abline_x.pdf"),
  width  = 8,
  height = 5
)
```

Visuelle Bestimmung des Quantils

EVF und 80%-Quantil der Beispieldaten aus Henze, 2018




```r
x_p_1 <- quantile(x, 0.80, type = 1)  # 0.80 Quantil, Definition 1
x_p_2 <- quantile(x, 0.80, type = 2)  # 0.80 Quantil, Definition 2
cat("typ 1: ", x_p_1, "\ntyp 2: ", x_p_2)
```

```
typ 1:  8.5
typ 2:  8.75
```

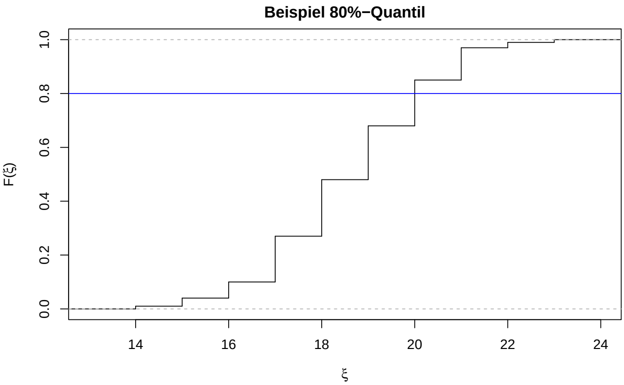
Visuelle Bestimmung des Quantils

EVF und 80%-Quantil der Pre.BDI-Werte aus dem Psychotherpiedatensatz

```
library(latex2exp)                          # TeX Formatierung laden
graphics.off()                              # Alle offenen graphical devices schließen
dev.new()                                   # Abbildungsinitialisierung

x   <- D$Pre.BDI                            # Double vector der Pre.BDI Werte
evf <- ecdf(x)                              # Evaluation der EVF

plot(                                       # plot() kann mit ecdf object umgehen
  evf,                                      # ecdf Objekt
  xlab      = TeX("$\\xi$"),                # x Achsenbeschriftung
  ylab      = TeX("$F(\\xi)$"),             # y Achsenbeschriftung
  verticals = TRUE,                         # vertikale Linien
  do.points = FALSE,                        # keine Punkte
  main      = "Beispiel 80%-Quantil"        # Titel
)
abline(                                     # horizontale Linie
  h   = 0.80,                               # y Ordinate der Linie
  col = "blue"                              # Farbe der Linie
)

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
  file   = file.path(fdir, "pds_8_ecdf_abline_prebdi.pdf"),
  width  = 8,
  height = 5
)
```

Visuelle Bestimmung des Quantils

EVF und 80%-Quantil der Pre.BDI-Werte aus dem Psychotherpiedatensatz




```r
x_p_1 <- quantile(D$Pre.BDI, 0.80, type = 1)  # 0.80 Quantil, Definition 1
x_p_2 <- quantile(D$Pre.BDI, 0.80, type = 2)  # 0.80 Quantil, Definition 2
cat("typ 1: ", x_p_1, "\ntyp 2: ", x_p_2)
```

```
typ 1:  20
typ 2:  20
```

Boxplots

Ein Boxplot visualisiert eine Quantil-basierte Zusammenfassung eines Datensatzes.

Typischerweise werden $\min x, x_{0.25}, x_{0.50}, x_{0.75}, \max x$ visualisiert.

- $\min x$ und $\max x$ werden oft als "Whiskerendpunkte" dargestellt.
- $x_{0.25}$ und $x_{0.75}$ sind untere und obere Grenze der zentralen grauen Box.
- $x_{0.50}$ wird als Strich in der zentralen grauen Box abgebildet.

$d_Q := x_{0.75} - x_{0.25}$ heißt *Interquartilsabstand* und dient als Verteilungsbreitenmaß

`summary()` liefert wesentliche Kennzahlen

```r
# Sechswertezusammenfassung
summary(D$Pre.BDI)
```

```
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
  14.00   17.00   19.00   18.61   20.00   23.00 
```

Erstellen von Boxplots in R

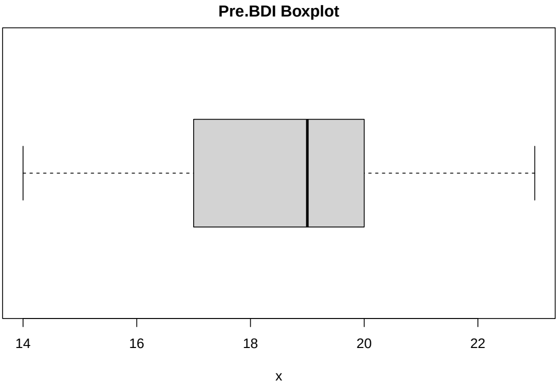
`boxplot()` erstellt einen Boxplot

Boxplot der Pre.BDI-Werte

```
# Boxplot erstellen
graphics.off()                    # Alle offenen graphical devices schließen
dev.new()                         # Abbildungsinitialisierung

boxplot(                          # Boxplot
  D$Pre.BDI,                      # Datensatz
  horizontal  = T,                # horizontale Darstellung
  range       = 0,                # Whiskers bis zu min x und max x
  xlab        = "x",              # x Achsenbeschriftung
  main        = "Pre.BDI Boxplot"   # Titel
)

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
  file        = file.path(fdir, "pds_8_boxplot_prebdi.pdf"),
  width       = 8,
  height      = 5
)
```

Boxplots

Boxplot der Pre.BDI-Werte



Es gibt viele Boxplotvariationen (cf. McGill, Tukey, and Larsen (1978)). Es sollte immer erläutert werden, welche Kennzahlen dargestellt werden!

Empirische Verteilungsfunktionen

Quantile und Boxplots

Übungen und Selbstkontrollfragen

Übungen und Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie die Begriffe der kumulativen absoluten und relativen Häufigkeitsverteilungen.
2. Erzeugen und visualisieren Sie die kumulativen absoluten und relativen Häufigkeitsverteilungen der Post.BDI Daten des Beispieldatensatzes *psychotherapie_datensatz.csv*.
3. Definieren Sie den Begriff der empirischen Verteilungsfunktion.
4. Erzeugen und visualisieren Sie die empirische Verteilungsfunktion der Post.BDI Daten.
5. Erläutern Sie den Begriff des sortierten Datensatzes.
6. Definieren Sie den Begriff des p-Quantils.
7. Berechnen Sie das obere Quartil des Beispieldatensatzes auf Folie 16.
8. Definieren Sie die Begriffe unteres Quartil, Median und oberes Quartil mithilfe des p-Quantils.
9. Berechnen Sie das untere Quartil, den Median und das obere Quartil der Post.BDI Daten. Vergleiche Sie ihre Ergebnisse mit der Ausgabe der summary() Funktion.
10. Erstellen Sie einen Boxplot der Post.BDI Daten.

References

Henze, Norbert. 2018. *Stochastik für Einsteiger*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22044-0.

Hyndman, Rob J., and Yanan Fan. 1996. "Sample Quantiles in Statistical Packages." *The American Statistician* 50 (4): 361. https://doi.org/10.2307/2684934.

McGill, Robert, John W. Tukey, and Wayne A. Larsen. 1978. "Variations of Box Plots." *The American Statistician* 32 (1): 12. https://doi.org/10.2307/2683468.