Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(8) Vektoren

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Definition (Vektorraum)

Es seien V eine nichtleere Menge und S eine Menge von Skalaren. Weiterhin sei eine Abbildung

$$+ : V \times V \to V, (v_1, v_2) \mapsto +(v_1, v_2) =: v_1 + v_2, \tag{1}$$

genannt *Vektoraddition*, definiert. Schließlich sei eine Abbildung

$$\cdot : S \times V \to V, (s, v) \mapsto \cdot(s, v) =: sv, \tag{2}$$

genannt *Skalarmultiplikation* definiert. Dann wird das Tupel $(V, S, +, \cdot)$ genau dann *Vektorraum* genannt, wenn für beliebige Elemente $v, w, u \in V$ und $a, b \in S$ folgende Bedingungen gelten:

(1) Kommutativität der Vektoraddition $v + w = w + v$

(2) Assoziativität der Vektoraddition $(v + w) + u = v + (w + u)$

(3) Existenz eines neutralen Elements der Vektoraddition $\exists\, 0 \in V$ mit $v + 0 = 0 + v = v.$

(4) Existenz inverser Elemente der Vektoraddition $\forall v \in V\, \exists -v \in V$ mit $v + (-v) = 0.$

(5) Existenz eines neutralen Elements der Skalarmultiplikation $\exists\, 1 \in S$ mit $1 \cdot v = v.$

(6) Assoziativität der Skalarmultiplikation $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$

(7) Distributivität hinsichtlich der Vektoraddition $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w.$

(8) Distributivität hinsichtlich der Skalaraddition $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v.$

Reeller Vektorraum

Bemerkungen

- Es gibt viele sehr verschiedene Vektorräume
- Beispiele für Mengen, auf denen eine Vektorraumstruktur definiert werden kann, sind
  - Die Menge der Matrizen
  - Die Menge der Polynome
  - Die Menge der Lösungen eines linearen Gleichungssystems
  - Die Menge der reellen Folgen
  - Die Menge der stetigen Funktionen
- Wir sind hier nur an der Vektorraumstruktur auf den reellen m-Tupeln interessiert
- Zur Erinnerung: die reellen m-Tupel bezeichnen wir mit

$$\mathbb{R}^m := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \leq i \leq m \right\} \tag{3}$$

- Wir sprechen $\mathbb{R}^m$ als "R hoch m" aus.
- Die Elemente $x \in \mathbb{R}^m$ nennen wir *reelle Vektoren* oder einfach *Vektoren*

Theorem (Reeller Vektorraum)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Vektoraddition* durch

$$+ : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} \tag{4}$$

und die *Skalarmultiplikation* durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (a, x) \mapsto ax = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_m \end{pmatrix} \tag{5}$$

Dann bildet $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ mit den Rechenregeln der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ einen Vektorraum, den wir den *reellen Vektorraum* nennen.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Man sagt, dass Vektoraddition und Skalarmultiplikation *komponentenweise* durchgeführt werden.

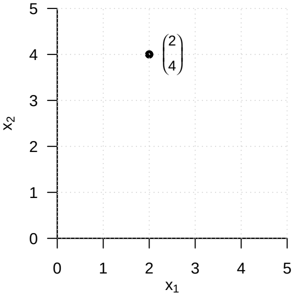
Beispiele

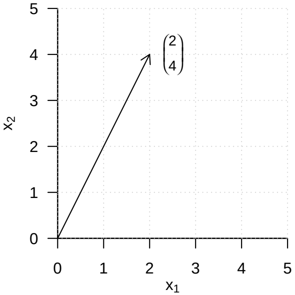
∘ Für $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+1 \\ 3+0 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

∘ Für $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt $x - y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

∘ Für $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $a := 3$ gilt $ax = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

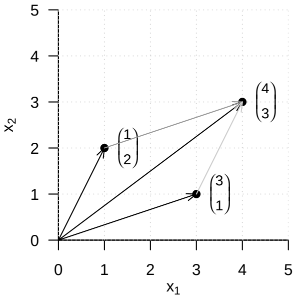
Visualisierung von Vektoren in $\mathbb{R}^2$





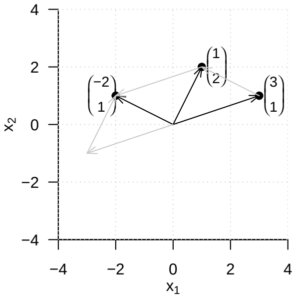
Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$



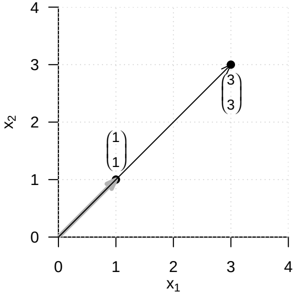
Vektorsubtraktion in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \tag{7}$$



Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$

$$3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \tag{8}$$



Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Definition (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$)

Das *Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^m$ ist definiert als die Abbildung

$$\langle\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle(x, y)\rangle := \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i. \tag{9}$$

Bemerkungen

- Das Skalarprodukt heißt Skalarprodukt, weil es einen Skalar ergibt, nicht weil Skalare multipliziert werden.
- Wir sehen später, dass mit der Identifikation $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m\times 1}$ und der Matrixtransposition gilt, dass

$$\langle x, y\rangle = x^T y. \tag{10}$$

Beispiel

Es seien

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } y := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Dann ergibt sich

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2 + 0 + 3 = 5. \tag{12}$$

Definition (Euklidischer Vektorraum)

Das Tupel $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ aus dem reellen Vektorraum $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ und dem Skalarprodukt $\langle\rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ heißt *reeller kanonischer Euklidischer Vektorraum*.

Bemerkungen

- Generell heißt jedes Tupel aus einem Vektorraum und einem Skalarprodukt "Euklidischer Vektorraum".
- Informell sprechen wir aber oft auch einfach von $\mathbb{R}^m$ als "Euklidischer Vektorraum" und insbesondere bei $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ von "Euklidischen Vektorraum".
- Ein Euklidischer Vektorraum ist ein Vektorraum mit geometrischer Struktur, die durch das Skalarprodukt induziert wird.
- Insbesondere bekommen im Euklidischen Vektorraum Begriffe wie die *Länge* eines Vektors, der *Abstand* zweier Vektoren und der *Winkel* zwischen zwei Vektoren mithilfe des Skalarproduktes eine Bedeutung.

Euklidischer Vektorraum

Definition (Länge, Abstand, Winkel)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Die *Länge* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{13}$$

- Der *Abstand* zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$d(x, y) := \|x - y\|. \tag{14}$$

- Der *Winkel* α zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x, y \neq 0$ ist definiert durch

$$0 \le \alpha \le \pi \text{ und } \cos\alpha := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \tag{15}$$

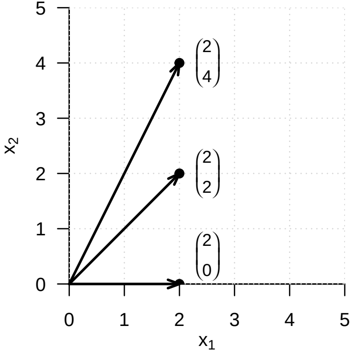
Bemerkungen

- $\|x\|$ heißt auch *Norm von* x oder ℓ_2*-Norm von* x.
- Ohne Beweis halten wir fest, dass für den Abstand gilt, dass

$$d(x, y) \ge 0, d(x, x) = 0, d(x, y) = d(y, x) \text{ und } d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y). \tag{16}$$

- $\cos$ ist auf $[0, \pi]$ bijektiv, also invertierbar.

Vektorlängen in $\mathbb{R}^2$



Euklidischer Vektorraum

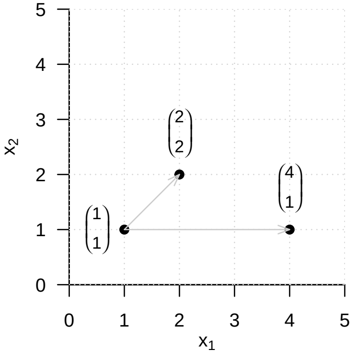
Vektorlängen in $\mathbb{R}^2$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2.00 \tag{17}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2.83 \tag{18}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4.47 \tag{19}$$

Abstände in $\mathbb{R}^2$



Abstände in $\mathbb{R}^2$

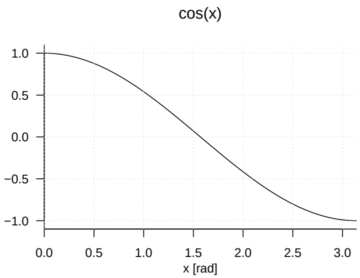
$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\approx 1.41 \tag{20}$$

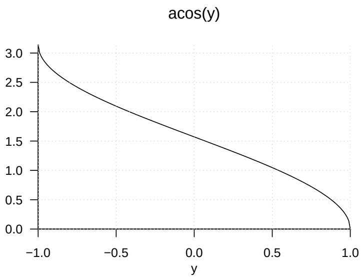
$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=\sqrt{9}=3 \tag{21}$$

Euklidischer Vektorraum

Winkel in $\mathbb{R}^2$

Kosinus und Arkuskosinus auf $[0, \pi]$

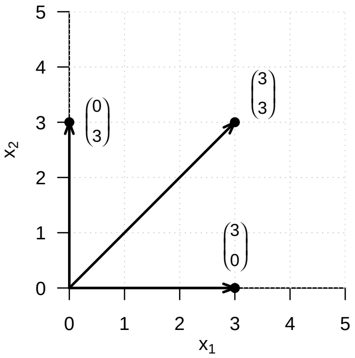




$$\text{deg} = \text{rad} \cdot \frac{180}{\pi}, \ \text{rad} = \text{deg} \cdot \frac{\pi}{180} \tag{22}$$

$$0\pi \ \text{rad} \ = 0.00 \ \text{rad} \ = 0 \ \text{deg} \ , \ \frac{\pi}{2} \ \text{rad} \ \approx 1.57 \ \text{rad} \ = 90 \ \text{deg} \ , \ \pi \ \text{rad} \ \approx 3.14 \ \text{rad} \ = 180 \ \text{deg} \tag{23}$$

Winkel in $\mathbb{R}^2$



Winkel in $\mathbb{R}^2$

Winkel in Radians

$$\operatorname{acos}\left(\frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\|}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{3\cdot 3 + 3\cdot 0}{\sqrt{3^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2}}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{9}{3\cdot\sqrt{18}}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.785 \tag{24}$$

Winkel in Grad

$$0.785 \cdot \frac{180°}{\pi} = 45° \tag{25}$$

Winkel in $\mathbb{R}^2$

Winkel in Radians

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2}}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{0}{3 \cdot 3}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \tag{26}$$

Winkel in Grad

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ \tag{27}$$

Definition (Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthogonal*, wenn gilt, dass
$$\langle x, y \rangle = 0 \tag{28}$$
- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthonormal*, wenn gilt, dass
$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ und } \|x\| = \|y\| = 1. \tag{29}$$

Bemerkung

- Für orthogonale und orthonormale Vektoren gilt insbesondere auch
$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{0}{\|x\|\|y\|} = 0 \tag{30}$$
also
$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \tag{31}$$

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition eines Vektorraums wieder.
2. Geben Sie die Definition des reellen Vektorraums wieder.
3. Es seien
$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } a := 2. \tag{32}$$
Berechnen Sie
$$v = a(x+y) \text{ und } w = \frac{1}{a}(y-x) \tag{33}$$
4. Geben Sie die Definition des Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^m$ wieder.
5. Für
$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$
berechnen Sie
$$\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle, \langle y, z\rangle \tag{35}$$
6. Geben Sie die Definition des Euklidischen Vektorraums wieder.
7. Geben Sie die Definition der Länge eines Vektors im Euklidischen Vektorraum wieder,
8. Berechnen Sie die Längen der Vektoren x, y, z aus Equation 34.
9. Geben Sie Definition des Abstands zweier Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
10. Berechnen Sie $d(x, y), d(x, z)$ und $d(y, z)$ für x, y, z aus Equation 34.
11. Geben Sie die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
12. Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren x und y, x und z, sowie y und z aus Equation 34.
13. Geben Sie die Definitionen der Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren wieder.