



# Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

## (7) Integralrechnung

## Übersicht

- Integrale kommen in der probabilistischen Datenanalyse an vielen Stellen vor:
  - WDF Definition und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten aus WDF
  - Beziehung von WDF und KVF
  - Erwartungswerte inklusive Varianz und Kovarianz
  - u.v.a.m.
- Ziel hier ist es, zentrale Begriffe der Integralrechnung zu wiederholen.
- In der Schule wird üblicherweise das *Riemannintegral* betrachtet.
- Zentrale Begriffe dabei sind *Stammfunktion*, *unbestimmtes Integral*, *bestimmtes Integral*, *Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung*, *uneigentliches Integral*, und *mehrdimensionales Integral*.
- Der Fokus liegt auf der Klärung von Begriffen und Symbolen, nicht dem Rechnen.

---

Unbestimmte Integrale

Bestimmte Integrale

Uneigentliche Integrale

Mehrdimensionale Integrale

Selbstkontrollfragen

---

## **Unbestimmte Integrale**

Bestimmte Integrale

Uneigentliche Integrale

Mehrdimensionale Integrale

Selbstkontrollfragen

## Definition (Stammfunktion, Unbestimmtes Integral)

Für ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine univariate reellwertige Funktion. Dann heißt eine differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$F' = f \tag{1}$$

*Stammfunktion von  $f$ .* Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann heißt

$$\int f(x) dx := F + c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

*unbestimmtes Integral* der Funktion  $f$ .

### Bemerkungen

- Die Ableitung der Stammfunktion  $F$  von  $f$  ist  $f$ .
- Das unbestimmte Integral ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von  $f$ .
- Die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  heißt *Integrationskonstante*, es gilt  $\frac{d}{dx} c = 0$ .
- Der Ausdruck  $\int f(x) dx$  ist als  $F(x) + c$  definiert
- In  $\int f(x) dx$  haben  $\int$  und  $dx$  keine eigentliche Bedeutung,  $f(x)$  heißt *Integrand*.

## Theorem (Stammfunktionen elementarer Funktionen)

Für elementare Funktionen der Statistik ergeben sich folgende Stammfunktionen

Name	Definition	Stammfunktion
Polynomfunktionen	$f(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$	$F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}$
Konstante Funktion	$f(x) := a$	$F(x) = ax$
Identitätsfunktion	$f(x) := x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
Lineare Funktion	$f(x) := ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$
Quadratfunktion	$f(x) := x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
Exponentialfunktion	$f(x) := \exp(x)$	$F(x) = \exp(x)$
Logarithmusfunktion	$f(x) := \ln(x)$	$F(x) = x \ln x - x$

Bemerkung

- Beweise ergeben sich direkt durch Ableiten der Stammfunktionen.

## Theorem (Rechenregeln für Stammfunktionen)

$f$  und  $g$  seien univariate reellwertige Funktion, die Stammfunktionen besitzen, und  $g$  sei invertierbar. Dann gelten folgende Rechenregeln für die Bestimmung von Integralen

(1) Summenregel

$$\int af(x) + bg(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx \text{ für } a, b \in \mathbb{R} \quad (3)$$

(2) Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \quad (4)$$

(3) Substitutionsregel

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt \text{ mit } t = g(x) \quad (5)$$

Bemerkung

- Für die Herleitung der Summenregel wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.

# Unbestimmte Integrale

## Beweis

Die Rechenregel der partiellen Integration ergibt sich durch Integration der Produktregel der Differentiation. Wir erinnern uns, dass gilt

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (6)$$

Integration beider Seiten der Gleichung und Berücksichtigung der Summenregel für Stammfunktionen ergibt dann

$$\begin{aligned} \int (f(x)g(x))' dx &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx \\ \Leftrightarrow f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \\ \Leftrightarrow \int f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \end{aligned} \quad (7)$$

Die Substitutionsregel ergibt sich für  $F' = f$  durch Anwendung der Kettenregel der Differentiation auf die verkettete Funktion  $F(g)$ . Speziell gilt zunächst

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \quad (8)$$

Integration beider Seiten der Gleichung

$$(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x) \quad (9)$$

ergibt dann

$$\begin{aligned} \int (F(g(x)))' dx &= \int f(g(x))g'(x) dx \\ \Leftrightarrow F(g(x)) + c &= \int f(g(x))g'(x) dx \\ \Leftrightarrow \int f(g(x))g'(x) dx &= \int f(t) dt \text{ mit } t := g(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Dabei ist die rechte Seite der letzten obigen Gleichung zu verstehen als  $F(g(x)) + c$ , also als Stammfunktion von  $f$  evaluiert an der Stelle  $t := g(x)$ . Das  $dt$  ist nicht durch  $dg(x)$  zu ersetzen, sondern rein notationstechnischer Natur.

□

---

Unbestimmte Integrale

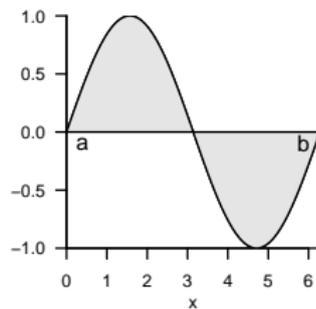
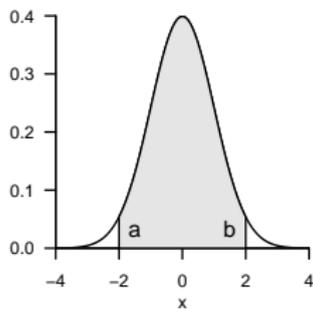
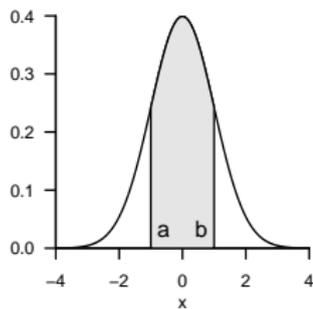
**Bestimmte Integrale**

Uneigentliche Integrale

Mehrdimensionale Integrale

Selbstkontrollfragen

Bestimmtes Integral von  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



## Definition (Zerlegung eines Intervalls, Feinheit)

Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  eine Menge von Punkten mit

$$a =: x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n := b \quad (11)$$

mit

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \text{ für } i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Dann heißt die Menge

$$Z := \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\} \quad (13)$$

der durch  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  definierten Teilintervalle von  $[a, b]$  *Zerlegung von  $[a, b]$* . Weiterhin heißt

$$Z_{\max} := \max_{i \in n} \Delta x_i, \quad (14)$$

also die größte der Teilintervalllängen  $\Delta x_i$ , die *Feinheit* von  $Z$ .

Bemerkung

- $\Delta x_i$  ist die Breite der Streifen in untenstehender Abbildung.

## Definition (Riemannsche Summe)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine beschränkte Funktion auf  $[a, b]$ , d.h.  $|f(x)| < c$  für  $0 < c < \infty$  und alle  $x \in [a, b]$ ,  $Z$  sei eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit Teilintervalllängen  $\Delta x_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Weiterhin sei für  $i = 1, \dots, n$   $\xi_i$  ein beliebiger Punkt im Teilintervall  $[x_{i-1}, x_i]$  der Zerlegung  $Z$ . Dann heißt

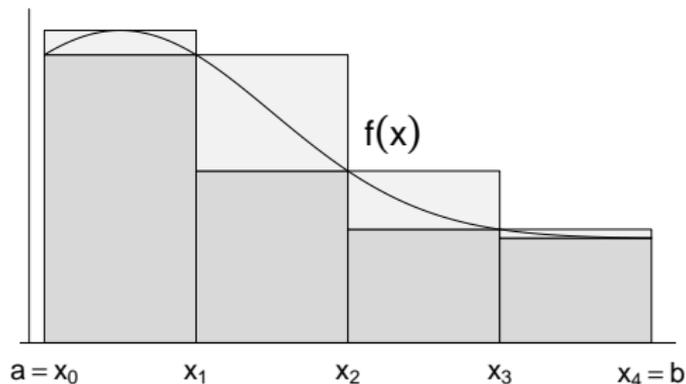
$$R(Z) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (15)$$

*Riemannsche Summe von  $f$  auf  $[a, b]$  bezüglich der Zerlegung  $Z$ .*

### Bemerkungen

- $|x|$  bezeichnet den *Betrag* von  $x \in \mathbb{R}$ .
- Wählt man in jedem  $[x_{i-1}, x_i]$  das Maximum von  $f$ , ergibt sich die *Riemannsche Obersumme*.
- Wählt man in jedem  $[x_{i-1}, x_i]$  das Minimum von  $f$ , ergibt sich die *Riemannsche Untersumme*.
- Für  $\Delta x_i \rightarrow 0, i = 1, \dots, n$  geht der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme gegen 0.

Zerlegung und Riemann Ober- und Untersummen für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



## Theorem (Riemannsches Integral)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine beschränkte reellwertige Funktion auf  $[a, b]$ . Weiterhin sei für  $Z_k, k = 1, 2, 3, \dots$  eine Folge von Zerlegungen von  $[a, b]$  mit zugehörigen Feinheiten  $Z_{k, \max}$ . Wenn für jede Folge von Zerlegungen  $Z_1, Z_2, \dots$  mit  $|Z_{k, \max}| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und für beliebig gewählte Punkte  $\xi_{ki}, i = 1, \dots, n$  im Teilintervall  $[x_{k,i-1}, x_{k,i}]$  der Zerlegung  $Z_k$  gilt, dass die Folge der zugehörigen Riemannschen Summen  $R(Z_1), R(Z_2), \dots$  gegen den gleichen Grenzwert strebt, dann heißt  $f$  auf  $[a, b]$  *integrierbar*. Der entsprechende Grenzwert der Folge von Riemannschen Summen wird *bestimmtes Riemannsches Integral* genannt und mit

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} R(Z_k) \text{ für } |Z_{k, \max}| \rightarrow 0 \quad (16)$$

bezeichnet.

### Bemerkungen

- Für  $f > 0$  ist  $\int_a^b f(x) dx$  der Flächeninhalt zwischen den  $f(x)$  und der  $x$ -Achse
- Generell ist  $\int_a^b f(x) dx$  der vorzeichenbehaftete Flächeninhalt den  $f(x)$  und der  $x$ -Achse.
- Positive und negative Flächeninhalt gleichen einander aus.
- $\int_a^b f(x) dx$  ist als Mittelwert von  $f$  auf  $[a, b]$  zu verstehen.

## Theorem (Rechenregeln für bestimmte Integrale)

Es seien  $f$  und  $g$  integrierbare Funktionen auf  $[a, b]$ . Dann gelten folgende Rechenregeln:

(1) Linearität. Für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b f(x) dx. \quad (17)$$

(2) Additivität. Für  $a < c < b$  gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (18)$$

(3) Vorzeichenwechsel bei Umkehrung der Integralgrenzen

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (19)$$

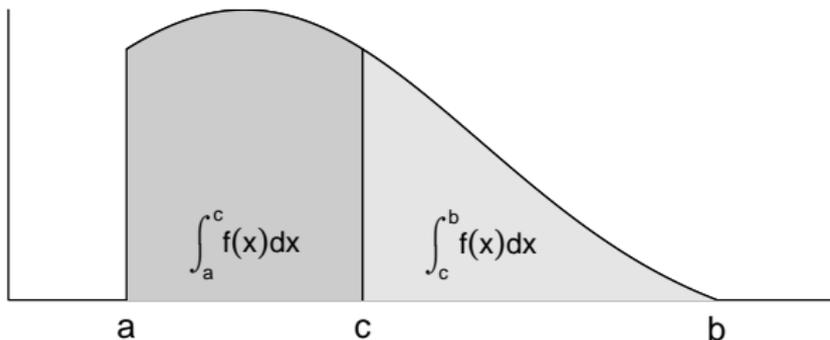
### Bemerkung

- Für Beweise verweisen wir auf die weiterführende Literatur.
- Eine graphische Darstellung der Additivität findet sich untenstehend.

# Bestimmte Integrale

## Additivität von Integralen

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

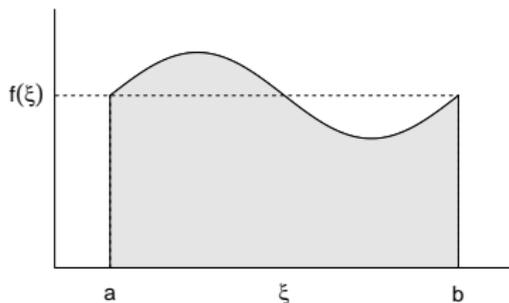


## Theorem (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Für eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  existiert ein  $\xi \in ]a, b[$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a) \quad (20)$$

- Statt eines Beweises verweisen wir auf untenstehende graphische Darstellung



## Theorem (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  stetige Funktion, dann ist die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t) dt \text{ mit } x, a \in I \quad (21)$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

### Beweis

Wir betrachten den Differenzquotienten

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) \quad (22)$$

Mit der Definition  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$  und der Additivität des bestimmten Integrals gilt dann

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (23)$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es also ein  $\xi \in ]x, x+h[$ , so dass

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = f(\xi) \quad (24)$$

Grenzwertbildung ergibt dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) \text{ für } \xi \in ]x, x+h[ \Leftrightarrow F'(x) = f(x). \quad (25)$$

□

## Theorem (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist  $F$  eine Stammfunktion einer stetigen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Intervall  $I$ , so gilt für  $a, b \in I$  mit  $a \leq b$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b \quad (26)$$

### Beweis

Mit den Rechenregeln für bestimmte Integrale und dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt sich

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(x) dx \quad (27)$$

□

---

Unbestimmte Integrale

Bestimmte Integrale

**Uneigentliche Integrale**

Mehrdimensionale Integrale

Selbstkontrollfragen

## Definition (Uneigentliche Integrale)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine univariate reellwertige Funktion. Mit den Definitionen

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (28)$$

und der Additivität von Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx \quad (29)$$

wird der Begriff des bestimmten Integrals auf die unbeschränkten Integrationsintervalle  $] -\infty, b]$ ,  $[a, \infty[$  und  $] -\infty, \infty[$  erweitert. Integrale mit unbeschränkten Integrationsintervallen heißen *uneigentliche Integrale*. Wenn die entsprechenden Grenzwerte existieren, sagt man, dass die uneigentlichen Integrale *konvergieren*.

Bemerkung

- Für die WDF  $f$  einer Zufallsvariable ist die Forderung  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  zentral.

# Uneigentliche Integrale

---

## Beispiel (Uneigentliches Integral)

Wir betrachten das uneigentliche Integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

Nach den Festlegungen in der Definition uneigentlicher Integrale gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx. \quad (30)$$

Mit der Stammfunktion  $F(x) = -x^{-1}$  von  $f(x) = x^{-2}$  ergibt sich für das bestimmte Integral in obiger Gleichung

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = F(b) - F(1) = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{b} + 1. \quad (31)$$

Es ergibt sich also

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} + \lim_{b \rightarrow \infty} 1 = 0 + 1 = 1. \quad (32)$$

---

Unbestimmte Integrale

Bestimmte Integrale

Uneigentliche Integrale

**Mehrdimensionale Integrale**

Selbstkontrollfragen

## Definition (Mehrdimensionale Integrale)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine multivariate reellwertige Funktion. Dann heißen Integrale der Form

$$\int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (33)$$

*mehrdimensionale bestimmte Integrale auf Hyperrechtecken.* Weiterhin heißen Integrale der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (34)$$

*mehrdimensionale uneigentliche Integrale.*

### Bemerkungen

- Man kann multivariate reellwertige Funktion nicht nur auf Hyperrechtecken, sondern im Prinzip auf beliebigen Hyperflächen integrieren. Dies kann sich jedoch oft schwierig gestalten. Der *Satz von Fubini* besagt, dass man mehrdimensionale Integrale in beliebiger Koordinatenfolge auswerten kann, also dass zum Beispiel

$$\int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2. \quad (35)$$

- Für die WDF eines Zufallsvektors ist die Forderung  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$  zentral.

## Beispiel (Zweidimensionales Integral)

Wir betrachten das zweidimensionale bestimmte Integral der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) := x_1^2 + 4x_2 \quad (36)$$

auf dem Rechteck  $[0, 1] \times [0, 1]$ . In

$$\int_0^1 \int_0^1 x_1^2 + 4x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^1 \left( \int_0^1 x_1^2 + 4x_2 \, dx_1 \right) dx_2 \quad (37)$$

betrachten wir zunächst das innere Integral.  $x_2$  nimmt hier die Rolle einer Konstanten ein. Eine Stammfunktion von  $g(x_1) := x_1^2 + 4x_2$  ist  $G(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3 + 4x_2x_1$ , wie man sich durch Ableiten von  $G$  überzeugt. Es ergibt sich also für das innere Integral

$$\int_0^1 x_1^2 + 4x_2 \, dx_1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 4x_2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 4x_2 \cdot 0 = \frac{1}{3} + 4x_2 \quad (38)$$

Betrachten des äußeren Integrals in Gleichung (37) ergibt dann mit der Stammfunktion  $H(x_2) = \frac{1}{3}x_2 + 2x_2^2$   $h(x_2) := \frac{1}{3} + 4x_2$ , dass

$$\int_0^1 \int_0^1 x_1^2 + 4x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^1 \frac{1}{3} + 4x_2 \, dx_2 = H(1) - H(0) = \frac{1}{3} \cdot 1 + 4 \cdot 1^2 - \frac{1}{3} \cdot 0 + 4 \cdot 0^2 = \frac{13}{3}. \quad (39)$$

---

Unbestimmte Integrale

Bestimmte Integrale

Uneigentliche Integrale

Mehrdimensionale Integrale

**Selbstkontrollfragen**

# Selbstkontrollfragen

---

1. Geben Sie die Definition des Begriffs der Stammfunktion wieder.
2. Geben Sie die Definition des Begriffs des unbestimmten Integrals wieder.
3. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung des Begriff des Riemannsches Integrals.
4. Geben Sie den ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wieder.
5. Geben Sie den zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wieder.
6. Erläutern Sie den Begriff des uneigentlichen Integrals.
7. Erläutern Sie den Begriff des mehrdimensionalen Integrals.