Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(6) Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit

Die hier behandelten Themen sind nicht zentral.

Sie dienen jedoch dem tieferen Verständnis von zum Beispiel

- der Grenzwertdefinition der Ableitung,
- dem Zentralen Grenzwertsatz und Normalverteilungsannahmen,
- der Begriffe der Stetigkeit und der Glattheit von Funktionen.

Folgen

Grenzwerte

Stetigkeit

Selbstkontrollfragen

Folgen

Grenzwerte

Stetigkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Reelle Folge)

Eine *reelle Folge* ist eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) \tag{1}$$

Die Funktionswerte $f(n)$ einer reellen Folge werden üblicherweise mit x_n bezeichnet und *Folgenglieder* genannt. Übliche Schreibweisen für Folgen sind

$$(x_1, x_2, ...) \text{ oder } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ oder } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (x_n). \tag{2}$$

Bemerkungen

- Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, hat eine reelle Folge immer unendlich viele Folgenglieder.

Folgen

Beispiele für reelle Folgen

(1) Harmonische Folgen

Reelle Folgen der Form

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) := \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \tag{3}$$

nennen wir *harmonische Folgen*. Für $p := q := 1$ hat eine harmonische Folge die Folgengliederform

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right). \tag{4}$$

(2) Geometrische Folgen

Reelle Folgen der Form

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) := q^n \text{ mit } q \in]-1, 1[\tag{5}$$

werden *geometrische Folgen* genannt. Für $q := \frac{1}{2}$ hat eine geometrische Folge die Folgengliederform

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots\right) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots\right) = \left(\frac{1^1}{2^1}, \frac{1^2}{2^2}, \frac{1^3}{2^3} \ldots\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\right) \tag{6}$$

Definition (Funktionenfolge)

Es sei ϕ eine Menge univariater reellwertiger Funktionen mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist eine Funktionenfolge eine Funktion der Form

$$F : \mathbb{N} \to \phi, n \mapsto F(n). \tag{7}$$

Die Funktionswerte $F(n)$ einer Funktionenfolgen werden üblicherweise mit f_n bezeichnet und *Folgenglieder* genannt. Übliche Schreibweisen für Funktionenfolgen sind

$$(f_1, f_2, ...) \text{ oder } (f_n)_{n=1}^{\infty} \text{ oder } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ oder } (f_n). \tag{8}$$

Bemerkungen

- Die Definition einer Funktionenfolge ist offenbar analog zur Definition einer reellen Folge.
- Der Unterschied zwischen einer reellen Folge und einer Funktionenfolge ist, dass die Folgenglieder einer reellen Folge reelle Zahlen, die Folgenglieder einer Funktionenfolgen dagegen univariate reellwertige Funktionen sind.

Beispiele für Funktionenfolgen

(1) Wir betrachten die Menge ϕ der univariaten reellwertigen Funktionen der Form

$$\phi := \{f_n | f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) := x^n \text{ für } n \in \mathbb{N}\} \tag{9}$$

Dann definiert

$$F : \mathbb{N} \to \phi, n \mapsto F(n) \tag{10}$$

eine Funktionenfolge. Für die Funktionswerte der Folgenglieder von F gilt

$$f_1(x) := x^1, f_2(x) := x^2, f_3(x) := x^3, \ldots \tag{11}$$

(2) Wir betrachten die Menge ϕ der univariaten reellwertigen Funktionen der Form

$$\phi := \{f_n | f_n : [-a,a] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ für } n \in \mathbb{N}\} \tag{12}$$

Dann definiert

$$F : \mathbb{N} \to \phi, n \mapsto F(n) \tag{13}$$

eine Funktionenfolge. Für die Funktionswerte der Folgenglieder von F gilt

$$f_1(x) := \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!}, f_2(x) := \sum_{k=0}^{2} \frac{x^k}{k!}, f_3(x) := \sum_{k=0}^{3} \frac{x^k}{k!}, \ldots \tag{14}$$

Folgen

Grenzwerte

Stetigkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Grenzwert einer Folge)

$x \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert einer reellen Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|x_n - x| < \epsilon \text{ für alle } n \geq m. \tag{15}$$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, wird *konvergente Folge* genannt, eine Folge die keinen Grenzwert besitzt, wird *divergente Folge* genannt. Dafür, dass $x \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist, schreibt man auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ oder } x_n \to x \text{ für } n \to \infty \text{ oder } x_n \xrightarrow{n\to\infty} x. \tag{16}$$

Bemerkungen

- Eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nennt man *Nullfolge*.

Beispiele

(1) Grenzwert von harmonischen Folgen

Für die verallgemeinerten harmonischen Folgen gilt mit $p, q \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}} = 0. \quad (17)$$

(1) Grenzwert von geometrischen Folgen

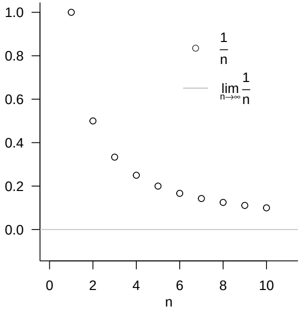
Für die geometrischen Folgen gilt mit $q \in]-1, 1[$

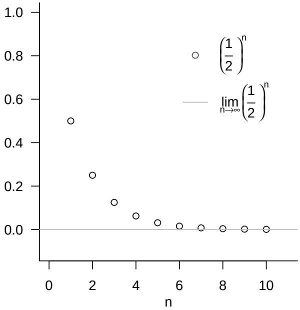
$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0. \quad (18)$$

Bemerkungen

- Harmonische und geometrische Folgen sind also Nullfolgen.
- Für Beweise dieser Theoreme verweisen wir auf die weiterführende Literatur.
- Die Beweise der Theoreme beruhen direkt auf dem Archimedischen Axiom und der Bernoulli Ungleichung.
- Beweise dieser Tatsachend wiederrum liegen mathematisch sehr tief.

Beispiele für Grenzwerte von Folgen





Definition (Grenzfunktion einer Funktionenfolge)

$F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Funktionenfolge von univariaten reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich D. F heißt *punktweise konvergent*, wenn die reelle Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in D$ eine konvergente Folge ist, also einen Grenzwert besitzt. Die Funktion, die jedem $x \in D$ diesen Grenzwert von $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ zuordnet, heißt dann die *Grenzfunktion der Funktionenfolge* F und hat die Form

$$f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{19}$$

Bemerkungen

- Die Grenzwerte von konvergenten reellen Folgen sind reelle Zahlen, die Grenzfunktionen von punktweise konvergenten Funktionenfolgen sind Funktionen.
- Neben der punktweisen Konvergenz gibt es noch den stärkeren Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz* von Funktionenfolgen, den wir hier aber nicht diskutieren.

Beispiel (1)

Wir betrachten die Funktionenfolge

$$F : \mathbb{N} \to \phi, n \mapsto F(n) \tag{20}$$

mit

$$\phi := \{f_n | f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) := x^n \text{ für } n \in \mathbb{N}\} \tag{21}$$

Dann ist F punktweise konvergent mit Grenzfunktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [0,1[\\ 1, & \text{für } x = 1 \end{cases} \tag{22}$$

da $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0,1[$ eine geometrische Folge und damit eine Nullfolge ist und $f_n(x) := x^n$ für $x = 1$ eine konstante Folge ist, für die alle Folgenglieder den Abstand 0 von 1 haben. Die Funktionenfolge F konvergiert also gegen eine Funktion, die auf dem gesamten Intervall $[0,1]$ gleich Null ist, außer im Punkt 1. Diese Funktion hat offenbar einen Sprung.

Beispiel (2)

Wir betrachten die Funktionenfolge

$$F : \mathbb{N} \to \phi, n \mapsto F(n) \tag{23}$$

mit

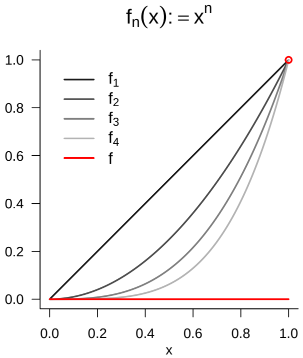
$$\phi := \{f_n | f_n : [-a, a] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ für } n \in \mathbb{N}\} \tag{24}$$

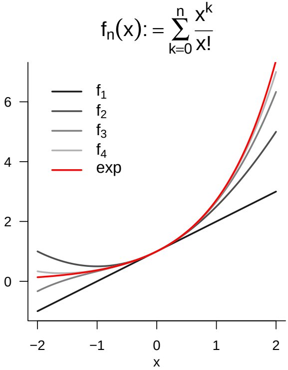
Dann ist F punktweise konvergent mit Grenzfunktion

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \exp(x) \tag{25}$$

Die Funktionenfolge F konvergiert also gegen die Exponentialfunktion auf $[-a, a]$.

Beispiele für Grenzwerte von Funktionenfolgen





Folgen

Grenzwerte

Stetigkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Grenzwert einer Funktion)

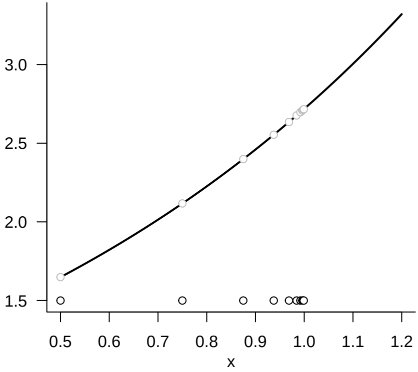
Für $D \subseteq \mathbb{R}$ und $Z \subseteq \mathbb{R}$ sei $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ eine Funktion und es seien $a, b \in \mathbb{R}$. b heißt *Grenzwert der Funktion f für x gegen a*, wenn

(1) es eine reelle Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit Folgengliedern in D mit Grenzwert a gibt, also $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, und

(2) für jede solche Folge gilt, dass b der Grenzwert der Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ der Folgenglieder von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist, also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ gilt.

Wenn b Grenzwert der Funktion f für x gegen a ist, so schreibt man auch $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Grenzwert der Exponentialfunktion in $a = 1$



Definition (Stetigkeit einer Funktion)

Eine Funktion $f : D \to Z$ mit $D \subseteq \mathbb{R}, Z \subseteq \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $a \in D$, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{26}$$

Ist f in jedem $x \in D$ stetig, so heißt f *stetig auf* D.

Bemerkungen

- Für eine in a stetige Funktion gilt mit der Definition

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) \tag{27}$$

- Bei stetigen Funktion können also Grenzwertbildung und Auswertung der Funktion vertauscht werden.
- Beispiele für stetige Funktionen sind die elementaren Funktionen aus (4) Funktionen.
- Beispiele für nicht-stetige Funktionen sind Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen und die Heaviside Funktion.

Folgen

Grenzwerte

Stetigkeit

Selbstkontrollfragen