



Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(3) Summen, Produkte, Potenzen

Definition (Summenzeichen)

Es bezeichnet

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (1)$$

Dabei stehen

- Σ für das griechische Sigma, mnemonisch für Summe,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Summanden und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex und
- x_1, x_2, \dots, x_n für die Summanden.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Summenzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindex ist irrelevant, es gilt $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben.
- Ist z.B. die Indexmenge $I := \{1, 5, 7\}$ definiert, so ist $\sum_{i \in I} x_i := x_1 + x_5 + x_7$.

Theorem (Rechenregeln für Summen)

(1) Summen gleicher Summanden

$$\sum_{i=1}^n x = nx \quad (2)$$

(2) Assoziativität bei Summen gleicher Länge

$$\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \quad (3)$$

(3) Distributivität bei Multiplikation mit einer Konstante

$$\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

(4) Aufspalten von Summen mit $1 < m < n$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=m+1}^n x_i \quad (5)$$

(5) Umindizierung

$$\sum_{i=0}^n x_i = \sum_{j=m}^{n+m} x_{j-m} \quad (6)$$

Bemerkungen

- Man beweist diese Rechenregeln durch Anwendung der Rechenregeln für die Grundrechenarten.
- Zum Beispiel gilt $\sum_{i=1}^n ax_i = ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n = a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = a \sum_{i=1}^n x_i$.

Definition (Produktzeichen)

Es bezeichnet

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n. \quad (7)$$

Dabei stehen

- \prod für das griechische *Pi*, mnemonisch für *Produkt*,
- das Subskript $i = 1$ für den Laufindex der Produktterme und den Startindex,
- das Superskript n für den Endindex und
- x_1, x_2, \dots, x_n für die Produktterme.

Bemerkungen

- Nur mit Subskript und Superskripten macht das Produktzeichen Sinn.
- Die Bezeichnung des Laufindexes ist irrelevant, es gilt $\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{j=1}^n x_j$.
- Manchmal wird der Laufindex auch als Element einer Indexmenge I angegeben.
- Ist z.B. die Indexmenge $J := \mathbb{N}_2^0$ definiert, so ist $\sum_{j \in J} x_j := x_0 + x_1 + x_2$.

Definition (Potenz)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^0$ ist die n -te Potenz von a definiert durch

$$a^0 := 1 \text{ und } a^{n+1} := a^n \cdot a. \quad (8)$$

Weiterhin ist für $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $n \in \mathbb{N}^0$ die negative n -te Potenz von a definiert durch

$$a^{-n} := (a^n)^{-1} := \frac{1}{a^n}. \quad (9)$$

a wird dabei *Basis* und n wird *Exponent* genannt.

Bemerkung

- Die Potenzdefinition ist *rekursiv* mit *Rekursionsanfang* $a^0 := 1$ und *Rekursionsschritt* $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

Theorem (Rechenregel für Potenzen)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \neq 0$ bei negativen Exponenten gelten

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ und } (a^n)^m = a^{nm}. \quad (10)$$

Definition (n -te Wurzel)

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die n -te Wurzel von a definiert als die Zahl r , so dass

$$r^n = a. \quad (11)$$

Theorem (Potenzschreibweise der n -ten Wurzel)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und r die n -te Wurzel von a . Dann gilt

$$r = a^{\frac{1}{n}} \quad (12)$$

Beweis

Es gilt

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}} = a^1 = a. \quad (13)$$

Also gilt mit der Definition der n -ten Wurzel, dass $r = a^{\frac{1}{n}}$.

□

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition des Summenzeichens wieder.
2. Berechnen Sie die Summen $\sum_{i=1}^3 2$, $\sum_{i=1}^3 i^2$, und $\sum_{i=1}^3 \frac{2}{3}i$.
3. Schreiben Sie die Summe $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ mithilfe des Summenzeichens.
4. Schreiben Sie die Summe $0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10$ mithilfe des Summenzeichens.
5. Geben Sie die Definition des Produktzeichens wieder.
6. Geben Sie die Definition der n -ten Potenz von $a \in \mathbb{R}$ wieder.
7. Berechnen Sie $2^2 \cdot 2^3$ und 2^5 und geben Sie die zugehörige Potenzregel wieder.
8. Berechnen Sie 6^2 und $2^2 \cdot 3^2$ und geben Sie die zugehörige Potenzregel wieder.
9. Begründen Sie, warum die n -te Wurzel von a als $a^{\frac{1}{n}}$ geschrieben werden kann.
10. Berechnen Sie $(\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$, $9^{\frac{1}{2}}$, und $4^{-\frac{1}{2}}$.