Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(2) Mengen

Definition (Mengen und Mengendefinition)

Nach Cantor (1895) ist eine *Menge* definiert als "eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsere Anschauung oder unseres Denken (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen". Wir schreiben

$$m \in M \text{ bzw. } m \notin M \tag{1}$$

um auszudrücken, dass m ein Element bzw. kein Element von M ist. Zur Definition von Mengen gibt es mindestens folgende Möglichkeiten:

(1) Auflisten der Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M := \{1, 2, 3\}$

(2) Angabe der Eigenschaften der Elemente, z.B. $M := \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$

(3) Gleichsetzen mit einer anderen eindeutig definierten Menge, z.B. $M := \mathbb{N}_3$

Bemerkungen

- $\{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$ wird als "$x \in \mathbb{N}$, für die gilt, dass $x < 4$ ist" gelesen.
- Die Bedeutung von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_3$ wird im Folgenden erläutert.
- Mengen sind *ungeordnet*, d.h. es gilt zum Beispiel $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\}$.

Definition (Teilmengen und Mengengleichheit)

- Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$. Ist A eine Teilmenge von B, so schreibt man
$$A \subseteq B \tag{2}$$
und nennt A *Untermenge* von B und B *Obermenge* von A.
- Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* einer Menge B, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, es aber zumindest ein Element $b \in B$ gibt, für das gilt $b \notin A$. Ist A eine echte Teilmenge von B, so schreibt man
$$A \subset B. \tag{3}$$
- Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, und wenn für jedes Element $b \in B$ gilt, dass auch $b \in A$. Sind die Mengen A und B gleich, so schreibt man
$$A = B. \tag{4}$$

Bemerkung

- Es seien $A := \{1\}$, $B := \{1,2\}$, $C := \{1,2\}$. Dann gilt $A \subset B, B \subseteq C, C \subseteq B$ und $B = C$.

Definition (Kardinalität)

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* und wird mit $|M|$ bezeichnet.

Beispiele

- Für $M := \{1, 2, 3\}$ gilt $|M| = 3$.
- Für $M := \{a, b\}$ gilt $|M| = 2$.
- Für $M := \{x, y, z, \pi\}$ gilt $|M| = 4$.

Definition (Leere Menge)

Eine Menge mit Kardinalität Null heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

- Für $M := \emptyset$ gilt $|M| = 0$.

Definition (Potenzmenge)

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt *Potenzmenge von* M. Die Potenzmenge einer Menge M wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet.

Bemerkungen

- Man beachte, dass die leere Untermenge von M und M selbst immer Elemente von $\mathcal{P}(M)$ sind.
- Ohne Beweis halten wir fest, dass gilt $|M| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Wir betrachten vier Beispiele zum Begriff der Potenzmenge.

- $M_0 := \emptyset$ sei die leere Menge. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_0) = \emptyset. \tag{5}$$

- M_1 sei die einelementige Menge $M_1 := \{a\}$. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_1) = \{\emptyset, \{a\}\}. \tag{6}$$

- Es sei $M_2 := \{a, b\}$. Dann hat M_2 sowohl ein- als auch zweielementige Teilmengen und es gilt

$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{a\}\, \{b\}, \{a, b\}\}. \tag{7}$$

- Es sei $M_3 := \{a, b, c\}$. Dann hat M ein-, zwei-, als auch dreielementige Teilmengen und es gilt

$$\mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}. \tag{8}$$

Definition (Mengenoperationen)

M und N seien zwei Mengen.

- Die *Vereinigung von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}, \tag{9}$$

- Der *Durchschnitt von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}. \tag{10}$$

  Gilt für zwei Mengen, dass $M \cap N = \emptyset$, dann heißen M und N *disjunkt*.

- Die *Differenz von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}. \tag{11}$$

- Die *symmetrische Differenz von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \Delta N := \{x | (x \in M \vee x \in N) \wedge x \notin M \cap N\}. \tag{12}$$

Beispiel

Für $M := \{1,2,3\}$ und $N := \{2,3,4,5\}$ gelten

- $M \cup N = \{1,2,3,4,5\}$
- $M \cap N = \{2,3\}$
- $M \setminus N = \{1\}$
- $N \setminus M = \{4,5\}$
- $M \Delta N = \{1,4,5\}$

Definition (Partition)

M sei eine Menge und $P := \{N_i\}$ sei eine Menge von Mengen N_i mit $i = 1, ..., n$, so dass gilt

$$(M = \cup_{i=1}^n N_i) \wedge \left(N_i \cap N_j = \emptyset \text{ für } i = 1, ..., n, j = 1, ..., n, i \neq j\right). \qquad (13)$$

Dann heißt P eine *Partition* (oder *Zerlegung*) von M.

Bemerkungen

- Partitionen von $M := \{1, 2, 3, 4\}$ sind zum Beispiel

$$P_1 := \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, P_2 := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, P_3 := \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}. \qquad (14)$$

Definition (Zahlenmengen)

Es bezeichnen

- $\mathbb{N} \ := \{1, 2, 3, ...\}$ die *natürlichen Zahlen*,
- $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, ..., n\}$ die *natürlichen Zahlen der Ordnung* n,
- $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die *natürlichen Zahlen* und Null,
- $\mathbb{Z} \ := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ die *ganzen Zahlen*,
- $\mathbb{Q} \ := \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ die *rationalen Zahlen*,
- $\mathbb{R}$ die *reellen Zahlen*, und
- $\mathbb{C} \ := \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}, i := \sqrt{-1}\}$ die *komplexen Zahlen*.

Bemerkungen

- $\mathbb{R}$ umfasst die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wie z.B.e, π und $\sqrt{2}$.
- Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definition (Intervalle)

Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen *Intervalle*. Für $a, b \in \mathbb{R}$ unterscheidet man

- das *abgeschlossene Intervall*
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}, \tag{15}$$
- das *offene Interval*
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \tag{16}$$
- die *halboffenen Intervalle*
$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\} \text{ und } [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}. \tag{17}$$

Bemerkungen

- Positiv Unendlich (∞) und negativ Unendlich ($-\infty$) sind keine Elemente von $\mathbb{R}$.
- Es gilt also immer $]-\infty, b]$ oder $]-\infty, b[$ bzw. $]a, \infty[$ oder $[a, \infty[$, sowie $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$.

Definition (Kartesische Produkte)

M und N seien zwei Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen M und N* die Menge aller geordneten Tupel (m,n) mit $m \in M$ und $n \in N$, formal

$$M \times N := \{(m,n) | m \in M, n \in N\}. \tag{18}$$

Das Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^2 := M \times M. \tag{19}$$

Seien weiterhin $M_1, ..., M_n$ Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen $M_1, ..., M_n$* die Menge aller geordneten n-Tupel $(m_1, ..., m_n)$ mit $m_i \in M_i$ für $i = 1, ..., n$, formal

$$\prod_{i=1}^{n} M_i := M_1 \times \cdots \times M_n := \{(m_1, ..., m_n) | m_i \in M_i \text{ für } i = 1, ..., n\}. \tag{20}$$

Das n-fache Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^n := \prod_{i=1}^{n} M := \{(m_1, , ..., m_n) | m_i \in M\}. \tag{21}$$

Bemerkungen

- Mengen sind ungeordnet, Zahlentupel sind geordnet.
- Es gilt also zum Beispiel $\{1,2\} = \{2,1\}$, aber $(1,2) \neq (2,1)$.

Definition (Die Menge $\mathbb{R}^n$)

Das n-fache Kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$\mathbb{R}^n := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} := \{x := (x_1, , ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\} \tag{22}$$

und "$\mathbb{R}$ *hoch* n" gesprochen. Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ typischerweise als Spalten

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{23}$$

und nennen sie n-*dimensionale Vektoren*. Die Elemente von $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ heißen nennt man *Skalare*.

Bemerkungen

- Ein Beispiel für $x \in \mathbb{R}^4$ ist $x = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 1.76 \\ 0.23 \\ 7.10 \end{pmatrix}$.

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition einer Menge nach Cantor (1895) wieder.
2. Nennen Sie drei Möglichkeiten zur Definition einer Menge.
3. Erläutern Sie die Ausdrücke $m \in M, m \notin N, M \subseteq N, M \subset N$ für zwei Mengen M und N.
4. Geben Sie die Definition der Kardinalität einer Menge wieder.
5. Geben Sie die Definition der Potenzmenge einer Menge wieder.
6. Es sei $M := \{1, 2\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(M)$.
7. Es seien $M := \{1, 2\}, N := \{1, 4, 5\}$. Bestimmen Sie $M \cup N, M \cap N, M \setminus N, M \Delta N$.
8. Erläutern Sie die Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n$, und $\mathbb{N}^0$.
9. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ und zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.
10. Geben Sie die Definition abgeschlossener, offener, und halboffener Intervalle wieder.
11. Es seien M und N Mengen. Erläutern Sie die Notation $M \times N$.
12. Geben Sie die Definition von $\mathbb{R}^n$ wieder.