Mathematische Grundlagen

BSc Psychologie | MSc Psychologie

MSc Klinische Psychologie und Psychotherapie

WiSe 2023/24

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(1) Sprache und Logik

Mathematik ist eine Sprache

Grundbausteine mathematischer Kommunikation

Aussagenlogik

Beweistechniken

Selbstkontrollfragen

Mathematik ist eine Sprache

Mathematik ist die Sprache der naturwissenschaftlichen Modellbildung

- $F = ma$ als Modell für die Bewegung von Objekten
- $\max_{q(z)} \int q(z) \ln\left(\frac{p(y,z)}{q(z)}\right) dz$ als Modell für die Funktionsweise des Gehirns

Mathematik dient der Kommunikation

Mathematik ist eine genaue Sprache

- "Was soll das heißen?" als Leitfrage beim Lesen und Schreiben mathematischer Inhalte
- Mathematik benutzt Symbole zur exakten und effizienten Beschreibung komplexer Sachverhalte

Mathematik ist eine Sprache

Besonderheiten der Mathematik als Sprache

Abstraktion

- Mathematik bemüht sich um Allgemeinverständlichkeit und breite Anwendbarkeit
- Mathematik bemüht sich um Transferierbarkeit von Erkenntnissen in andere Kontexte
- Mathematik versucht dabei, möglichst genau und verständlich vorzugehen

Genauigkeit

- Die Genauigkeit der mathematischen Sprache impliziert eine hohe Informationsdichte
- Die mathematische Sprache ist damit eher nüchtern und lässt überflüssiges weg
- In mathematischen Texten ist im besten Fall alles wichtig
- Die hohe Informationsdichte mathematischer Texte erfordert viel kognitive Energie
- Der hohe kognitive Energieverbrauch gebietet Langsamkeit und Ruhe beim Lesen

"Einen mathematischen Text kann man nicht lesen wie einen Roman, man muss ihn sich erarbeiten"

Luise Unger

Lernen einer Sprache

- Vokabeln (Begriffe) lernen
- Texte aktiv lesen und übersetzen
- Sprache mündlich anwenden
- Sprache schriftlich anwenden
- In den Sprachraum eintauchen

Mathematik ist eine Sprache

Grundbausteine mathematischer Kommunikation

Aussagenlogik

Beweistechniken

Selbstkontrollfragen

Definition

Eine Definition ist eine Grundannahme eines mathematischen Systems, die innerhalb dieses Systems weder begründet noch deduktiv abgeleitet wird. Definitionen können nur nach ihrer Nützlichkeit innerhalb eines mathematischen Systems bewertet werden.

Eine Definition lernt man am besten erst einmal auswendig und hinterfragt sie erst dann, wenn man ihren Nutzen in der Anwendung verstanden hat oder von diesem nicht überzeugt ist. Etwas Entspannung und Ruhe beim Umgang mit auf den ersten Blick komplexen Definitionen ist generell hilfreich.

Um zu kennzeichnen, dass wir ein Symbol als etwas definieren, nutzen wir die Schreibweise "$:=$". Zum Beispiel definiert $a := 2$ das Symbol a als die Zahl Zwei.

Theorem

Ein Theorem ist eine mathematische Aussage, die mittels eines Beweises als wahr/richtig erkannt werden kann. Dass heißt, ein Theorem wird immer aus Definitionen und/oder anderen Theoremen hergeleitet. Theoreme sind in diesem Sinne die "empirischen" Ergebnisse der Mathematik. Im Deutschen werden Theoreme auch oft als "Sätze" bezeichnet.

In der angewandten, datenanalytischen Mathematik sind Theoreme oft für Berechnungen hilfreich. Es lohnt sich also, sie auswendig zu lernen, da sie meist die Grundlage für die Auswertung und Interpretation von Daten bilden.

Um Gleichungen zu kennzeichnen nutzen wir das Gleichheitszeichen "$=$". So besagt also $a = 2$ in einem gegebenen Kontext, dass aufgrund bestimmter Voraussetzungen das Symbol oder die Variable a den Wert zwei hat.

Beweis

Ein Beweis ist eine logische Argumentationskette, die auf bekannte Definitionen und Theoreme zurückgreift, um die Wahrheit (Richtigkeit) eines Theorems zu belegen.

Kurze Beweise tragen oft zum Verständnis eines Theorems bei, lange Beweise eher nicht. Beweise sind also die Antwort auf die Frage warum eine mathematische Aussage gilt ("Warum ist das so?").

Beweise lernt man nicht auswendig. Wenn Beweise kurz sind, ist es sinnvoll, sie durchzuarbeiten, da sie meist bereits bekannte Inhalte wiederholen. Wenn sie lang sind, ist es sinnvoller sie zunächst zu übergehen, um sich nicht in Details zu verlieren und vom eigentlichen Weg abzukommen.

Grundbausteine mathematischer Kommunikation

Axiom

Axiome sind unbeweisbare Theoreme, in dem Sinne, als dass sie als Grundannahmen zum Aufbau mathematischer Systeme dienen. Der Übergang zwischen Definitionen und Axiomen ist oft fließend. Da wir mathematisch nicht besonders tief arbeiten, bevorzugen wir den Begriff der Definition.

Lemma

Ein Lemma ist ein "Hilfstheorem", also eine mathematische Aussage, die zwar bewiesen wird, aber nicht so bedeutend ist wie ein Theorem. Da wir einerseits auf bedeutende Inhalte fokussieren und andererseits mathematische Aussagen nicht diskriminieren wollen, verzichten wir auf diesen Begriff und nutzen stattdessen den Begriff des Theorems.

Korollar

Ein Korollar ist eine mathematische Aussage, die sich durch einen einfachen Beweis aus einem Theorem ergibt. Da die "Einfachheit" mathematischer Beweise eine relative Eigenschaft ist, verzichten wir auf diesen Begriff und nutzen stattdessen den Begriff des Theorems.

Vermutung

Vermutungen sind mathematische Aussagen von denen unbekannt ist, ob sie beweisbar oder widerlegbar sind. Da wir im Bereich der angewandten Mathematik arbeiten, treffen wir nicht auf Vermutungen.

$\Rightarrow$ Wir werden diese Begriffe nicht verwenden

Mathematik ist eine Sprache

Grundbausteine mathematischer Kommunikation

Aussagenlogik

Beweistechniken

Selbstkontrollfragen

Aussagenlogik spielt zum Beispiel folgenden Kontexten eine wichtige Rolle

- Definition von Mengenoperationen
- Optimierungsbedingungen von Funktionen
- `if`-statements der Programmierung
- Repräsentationstheorie des Messens
- Beweise
- u.v.a.m.

Definition (Aussage)

Eine *Aussage* ist ein Satz, dem eindeutig die Eigenschaft *wahr* oder *falsch* zugeordnet werden kann.

Bemerkungen

- Das Adjektiv *wahr* kann auch als *richtig* verstanden werden.
- Wir kürzen wahr mit w und falsch mit f ab.
- Im Körper der reellen Zahlen ist die Aussage $1 + 1 = 2$ richtig.
- Im Körper der reellen Zahlen ist die Aussage $1 + 1 = 3$ falsch.
- Die Binärität des Wahrheitsgehalts von Aussagen ist eine Annahme.
- Definitionen sind immer wahr.

Definition (Negation)

A sei eine Aussage. Dann ist die *Negation von* A die Aussage, die falsch ist, wenn A wahr ist und die wahr ist, wenn A falsch ist. Die Negation von A wird mit $\neg A$, gesprochen als "nicht A", bezeichnet.

- Die Negation der Aussage "Die Sonne scheint" ist die Aussage "Die Sonne scheint nicht".
- Die Negation der Aussage $1 + 1 = 2$ ist die Aussage $1 + 1 \neq 2$.
- Die Negation der Aussage $x > 1$ ist die Aussage $x \leq 1$.
- Tabellarisch stellt man die Definition der Negation einer Aussage A wie folgt dar

A	$\neg A$
w	f
f	w

- Tabellen obiger Form nennt man *Wahrheitstafeln*.

Definition (Konjunktion)

A und B seien Aussagen. Dann ist die *Konjunktion von A und B* die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind. Die Konjunktion von A und B wird mit $A \wedge B$, gesprochen als "A und B", bezeichnet.

Bemerkungen

- Die Definition der Konjunktion impliziert folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

- Die Aussage $2 \geq 1$ ist wahr und die Aussage $2 > 1$ ist wahr. Also ist die Aussage $2 \geq 1 \wedge 2 > 1$ wahr.
- Die Aussage $1 \geq 1$ ist wahr und die Aussage $1 > 1$ ist falsch. Also ist die Aussage $1 \geq 1 \wedge 1 > 1$ falsch.

Definition (Disjunktion)

A und B seien Aussagen. Dann ist die *Disjunktion von A und B* die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A und B wahr ist. Die Disjunktion von A und B wird mit $A \vee B$, gesprochen als "A oder B", bezeichnet.

Bemerkungen

- Die Definition der Disjunktion impliziert folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

- $A \vee B$ ist insbesondere auch wahr, wenn A und B beide wahr sind.
- Das "oder" ist genauer also ein "und/oder".
- Man nennt die Disjunktion daher auch ein "nicht exklusives oder".
- Die Aussage $2 \geq 1$ ist wahr und die Aussage $2 > 1$ ist wahr. Also ist die Aussage $2 \geq 1 \vee 2 > 1$ wahr.
- Die Aussage $1 \geq 1$ ist wahr und die Aussage $1 > 1$ ist falsch. Also ist die Aussage $1 \geq 1 \vee 1 > 1$ wahr.

Definition (Implikation)

A und B seien Aussagen. Dann ist die *Implikation*, bezeichnet mit $A \Rightarrow B$ die Aussage, die dann und nur dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist. A heißt dabei die *Voraussetzung (Prämisse)* und B der *Schluss (Konklusion)* der Implikation. $A \Rightarrow B$ spricht man als "aus A folgt B", "A impliziert B", oder "wenn A, dann B".

Bemerkungen

- Die Definition der Implikation impliziert folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- Man mag $\Rightarrow$ als "daraus folgt" lesen.

Aussagenlogik

Wir betrachten die Wahrheitstafel der Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

"Aus Falschem folgt beliebiges (ex falso sequitur quodlibet)"

- Man sieht, dass wenn A wahr ist und $A \Rightarrow B$ wahr ist, B wahr ist.
- Man sieht, dass wenn A wahr ist und $A \Rightarrow B$ falsch ist, B falsch ist.
- Man sieht, dass wenn A falsch ist und $A \Rightarrow B$ wahr ist, B wahr oder falsch sein kann
- Aus einer wahren Voraussetzung folgt also nur bei wahrer Implikation eine wahre Konklusion.

"Hinreichend und notwendig"

- Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, sagt man "A ist hinreichend für B" und "B ist notwendig für A".
- Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, gilt: wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.
- Die Wahrheit von A reicht also für die Wahrheit von B aus.
- Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, gilt: wenn B falsch ist, dann ist auch A falsch.
- Die Wahrheit von B ist also für die Wahrheit von A notwendig.

Definition (Äquivalenz)

A und B seien Aussagen. Die *Äquivalenz von A und B* ist die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind oder wenn A und B beide falsch sind. Die Äquivalenz von A und B wird mit $A \Leftrightarrow B$ bezeichnet und gesprochen als "A genau dann wenn B" oder "A ist äquivalent zu B".

Bemerkungen

- Die Definition der Äquivalenz impliziert folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Definition (Logische Äquivalenz)

Zwei Aussagen heißen *logisch äquivalent*, wenn ihre Wahrheitstafeln gleich sind.

Theorem (Logische Äquivalenzen)

A und B seien zwei Aussagen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(2) $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Bemerkungen

- (1) und (2) sind Beispiele für logische Äquivalenzen, natürlich gibt es sehr viele mehr.
- Zum Beweis von (1) und (2) untersuchen wir untenstehend ihre Wahrheitstafeln.
- In Worten besagt (1), dass die Aussage "A und"B sind äquivalent" logisch äquivalent zur Aussage "Aus A folgt B" und aus "B folgt A" ist. Dies ist die Grundlage für viele "direkte Beweise" mithilfe von Äquivalenzumformungen. In Worten besagt (2), dass die Aussage "Aus A folgt"B" logisch äquivalent zur Aussage "Aus nicht B folgt nicht A" ist. Dies ist die Grundlage für die Technik des "indirekten Beweises".

<u>Beweis</u>

Nach Definition des Begriffs der logischen Äquivalenz müssen wir zeigen, dass die Wahrheitstafeln der betrachteten Aussagen gleich sind. Wir zeigen erst (1), dann (2).

(1) Wir erinnern an die Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Wir betrachten weiterhin die Wahrheitstafel von $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Der Vergleich der Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow$ mit den ersten beiden und der letzten Spalte der Wahrheitstafel von $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ zeigt ihre Gleichheit.

Beweis

Nach Definition des Begriffs der logischen Äquivalenz müssen wir zeigen, dass die Wahrheitstafeln der betrachteten Aussagen gleich sind. Wir zeigen erst (1), dann (2).

(2) Wir erinnern an die Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wir betrachten weiterhin die Wahrheitstafel von $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	f	f	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

Der Vergleich der Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$ mit den ersten beiden und der letzten Spalte der Wahrheitstafel von $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ zeigt ihre Gleichheit.

Mathematik ist eine Sprache

Grundbausteine mathematischer Kommunikation

Aussagenlogik

Beweistechniken

Selbstkontrollfragen

Typische Theoreme haben die Form $A \Rightarrow B$

- Direkte Beweise nutzen Äquivalenzumformungen um $A \Rightarrow B$ zu zeigen
- Indirekte Beweise nutzen die logische Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
- Beweise durch Widerspruch zeigen, dass $(\neg B) \wedge A$ falsch ist

Wir nutzen in den allermeisten Fällen direkte Beweise durch

Äquivalenzumformungen von Gleichungen oder Ungleichungen

Äquivalenzumformungen von Gleichungen

- Addition/Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten

$$2x + 4 = 10 \Leftrightarrow 2x = 6 \tag{1}$$

- Multiplikation mit/Division durch eine Zahl auf beiden Seiten

$$2x = 6 \Leftrightarrow x = 3 \tag{2}$$

- Anwendung einer injektiven Funktion auf beiden Seiten

$$\exp(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2) \tag{3}$$

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- Addition/Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten

$$-2x + 4 \geq 10 \Leftrightarrow -2x \geq 6 \tag{4}$$

- Multiplikation mit/Division durch eine Zahl auf beiden Seiten
- Bei Multiplikation/Division mit negativer Zahl Umkehrung der Ungleichung

$$-2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -3 \tag{5}$$

- Anwendung monotoner Funktionen auf beiden Seiten

$$\exp(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln(2) \tag{6}$$

Theorem (Quadrate positiver Zahlen)

Es seien a und b zwei positive Zahlen. Dann gilt $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.

Direkter Beweis

Es sei $a^2 < b^2$ die Aussage A und $a < b$ die Aussage B. Dann gilt

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < b^2 - a^2 \Leftrightarrow 0 < (b+a)(b-a) \Leftrightarrow 0 < (b-a) \Leftrightarrow a < b. \tag{7}$$

Indirekter Beweis

Es sei $a^2 \geq b^2$ die Aussage $\neg A$. Weiterhin sei $a \geq b$ die Aussage $\neg B$. Dann gilt

$$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq ab \wedge ab \geq b^2 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2. \tag{8}$$

Beweis durch Widerspruch

Wir zeigen, dass die Annahme $(\neg B) \wedge A$ auf eine falsche Aussage führt. Es gilt

$$a \geq b \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 \geq ab \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow ab \leq a^2 < b^2. \tag{9}$$

Weiterhin gilt

$$a \geq b \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow ab \geq b^2 \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 \leq ab. \tag{10}$$

Insgesamt gilt dann also die falsche Aussage

$$ab \leq a^2 < b^2 \leq ab \Leftrightarrow ab < ab. \tag{11}$$

Mathematik ist eine Sprache

Grundbausteine mathematischer Kommunikation

Aussagenlogik

Beweistechniken

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Besonderheiten der mathematischen Sprache.
2. Was sind wesentliche Tätigkeiten zum Erlernen einer Sprache?
3. Erläutern Sie den Begriff der Definition.
4. Erläutern Sie den Begriff des Theorems.
5. Erläutern Sie den Begriff des Beweises.
6. Geben Sie die Definition einer mathematischen Aussage wieder.
7. Geben Sie die Definition der Negation einer mathematischen Aussage wieder.
8. Geben Sie die Definition der Konjunktion zweier mathematischer Aussagen wieder.
9. Geben Sie die Definition der Disjunktion zweier mathematischer Aussagen wieder.
10. Geben Sie die Definition der Implikation wieder.
11. Geben Sie die Definition der Äquivalenz wieder.
12. Geben Sie die Definition der logischen Äquivalenz wieder.
13. Erläutern Sie die Begriffe des direkten Beweises, des indirekten Beweises und des Beweises durch Widerspruch.
14. Beweisen Sie, dass gilt

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{12}$$