Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2023

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(4) Normalverteilungen

Überblick

Die multivariate Normalverteilung ist zentraler Bestandteil des ALMs.

Die multivariate Normalverteilung ist die multivariate Generalisierung der univariaten Normalverteilung.

Die Motivation von Normalverteilungsannahmen liegt immer im Zentralen Grenzwertsatz:

- Probabilistische Terme repräsentieren die Summation sehr vieler Prozesse, die durch die deterministischen Bestandteile eines Modell, also eine mechanistische wissenschaftliche Theorie, nicht erklärt werden.
- Nach dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Summe dieser Prozesse normalverteilt.

Darüberhinaus hat die Normalverteilung günstige mathematische Eigenschaften, die auch in der Quantifikation subjektiver Unsicherheit genutzt werden können. Zur Erarbeitung der Inhalte dieser Einheit bietet sich eine Revision von (5) Multivariate Verteilungen aus Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz an

Kontinuierliche Zufallsvektoren

Konstruktion und Definition

Transformationen

Sphärische Verteilungen

Marginale und bedingte Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Kontinuierliche Zufallsvektoren

Konstruktion und Definition

Transformationen

Sphärische Verteilungen

Marginale und bedingte Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Definition (Zufallsvektor)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum. Ein n-dimensionaler *Zufallsvektor* ist definiert als eine Abbildung

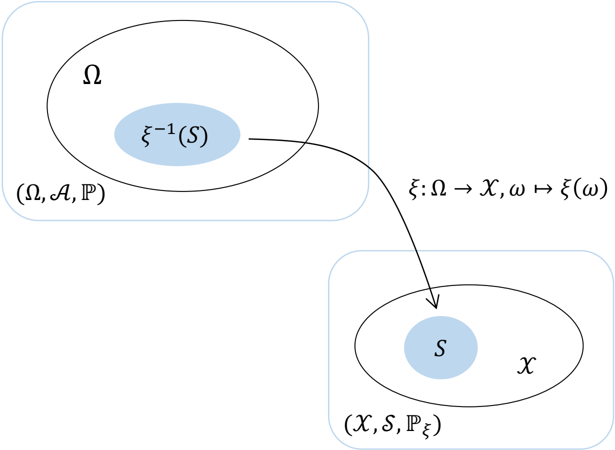
$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) := \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{2}$$

Bemerkungen

- ξ ist hier eine univariate, vektorwertige Abbildung.
- Das Standardbeispiel für $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ ist $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
- Wir verzichten auf eine explizite Einführung n-dimensionaler σ-Algebren wie $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- Ohne Beweis halten wir fest, dass ξ messbar ist, wenn die Funktionen $\xi_1, ..., \xi_n$ messbar sind.
- Die Komponentenfunktionen eines Zufallsvektors sind Zufallsvariablen.
- Ein n-dimensionaler Zufallsvektor ist die Konkatenation von n Zufallsvariablen.
- Für $n := 1$ ist ein Zufallsvektor eine Zufallsvariable.



$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) := \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\left(\xi^{-1}(S)\right) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_\xi(S)$$

Definition (Kontinuierlicher Zufallsvektor, Multivariate WDF)

Ein Zufallsvektor ξ heißt *kontinuierlich*, wenn $\mathbb{R}^n$ der Ergebnisraum von ξ ist und eine Funktion

$$p_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p_\xi(x), \tag{3}$$

existiert, für die gilt

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(x)\, dx = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_{1_1}}^{x_{2_1}} \cdots \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} p_\xi(s_1, ..., s_n)\, ds_1 \cdots ds_n$.

Eine entsprechende Funktion p heißt *multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)* von ξ.

Bemerkungen

- Der Begriff der multivariaten WDF ist analog zum Begriff der WDF.
- Man spricht häufig auch einfach von der WDF eines Zufallsvektors
- Wie univariate WDFen sind multivariate WDFen nicht-negativ und normiert.
- Wie für kontinuierliche Zufallsvariablen gilt für kontinuierliche Zufallsvektoren

$$\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}_\xi(x \leq \xi \leq x) = \int_{x_1}^{x_1} \cdots \int_{x_n}^{x_n} p_\xi(s_1, ..., s_n)\, ds_1 \cdots ds_n = 0 \tag{4}$$

Definition (Erwartungswert und Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren)

ξ sei ein n-dimensionaler Zufallvektor. Dann ist der *Erwartungwert* von ξ definiert als der n-dimensionale reelle Vektor

$$\mathbb{E}(\xi) := \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(\xi_n) \end{pmatrix} \tag{5}$$

und die *Kovarianzmatrix* von ξ ist definiert als die $n \times n$ Matrix

$$\mathbb{C}(\xi) := \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^T\right) \tag{6}$$

Bemerkungen

- Der Erwartungswert von ξ ist der Vektor der Erwartungswerte $\mathbb{E}(\xi_1), ..., \mathbb{E}(\xi_n)$.
- Die Kovarianzmatrix ist formal analog zur Kovarianz zweier Zufallsvariablen definiert.

Theorem (Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors)

ξ sei ein n-dimensionaler Zufallvektor und $\mathbb{C}(\xi)$ sei seine Kovarianzmatrix. Dann gilt

$$\mathbb{C}(\xi) = \Big(\mathbb{C}(\xi_i, \xi_j)\Big)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}(\xi_1, \xi_1) & \mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) & \cdots & \mathbb{C}(\xi_1, \xi_n) \\ \mathbb{C}(\xi_2, \xi_1) & \mathbb{C}(\xi_2, \xi_2) & \cdots & \mathbb{C}(\xi_2, \xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}(\xi_n, \xi_1) & \mathbb{C}(\xi_n, \xi_2) & \cdots & \mathbb{C}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Bemerkung

- Die Kovarianzmatrix $\mathbb{C}(\xi)$ ist also die Matrix der Kovarianzen der Komponenten von ξ.

Beweis

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}(\xi) &:= \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\xi - \mathbb{E}(\xi))^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(\xi_n)\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}\xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbb{E}(\xi_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(\xi_n)\end{pmatrix}\right)^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1) \\ \vdots \\ \xi_n - \mathbb{E}(\xi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1) \\ \vdots \\ \xi_n - \mathbb{E}(\xi_n)\end{pmatrix}^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix}\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1) \\ \vdots \\ \xi_n - \mathbb{E}(\xi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1) & \dots & \xi_n - \mathbb{E}(\xi_n)\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathbb{E}\begin{pmatrix}(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1)) & \dots & (\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n))(\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1)) & \dots & (\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n))(\xi_n - \mathbb{E}(\xi_n))\end{pmatrix} \\
&= \left(\mathbb{E}\left((\xi_i - \mathbb{E}(\xi_i))(\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j))\right)\right)_{1 \le i,j \le n} \\
&= \left(\mathbb{C}(\xi_i, \xi_j)\right)_{1 \le i,j \le n}
\end{aligned}
$$

Kontinuierliche Zufallsvektoren

Konstruktion und Definition

Transformationen

Sphärische Verteilungen

Marginale und bedingte Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Konstruktion und Definition

Definition (Normalverteilte Zufallsvariable)

ξ sei eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right). \tag{8}$$

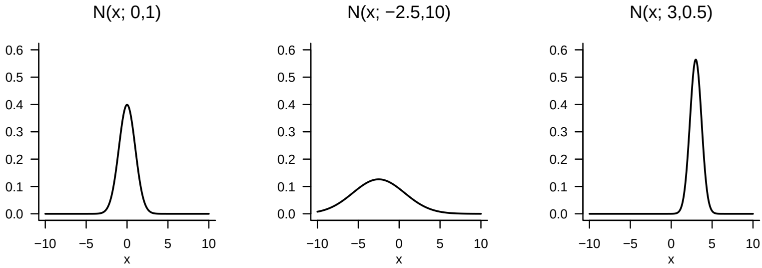
Dann sagen wir, dass ξ einer *Normalverteilung (oder Gauß-Verteilung) mit Erwartungswertparameter* $\mu \in \mathbb{R}$ *und Varianzparameter* $\sigma^2 > 0$ unterliegt und nennen ξ eine *normalverteilte Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ab. Die WDF einer normalverteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$N\left(x; \mu, \sigma^2\right) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right). \tag{9}$$

Bemerkungen

- Es gelten $\mathbb{E}(\xi) = \mu$ und $\mathbb{V}(\xi) = \sigma^2$.
- Der Parameter μ entspricht dem Wert höchster Wahrscheinlichkeitsdichte.
- Der Parameter σ^2 spezifiziert die Breite der WDF.
- $\xi \sim N(0, 1)$ heißt auch *standardnormalverteilt*.

Visualisierung univariater Normalverteilungsdichtefunktionen



Konstruktion und Definition

Theorem (Konstruktion bivariater Normalverteilungen)

$\zeta_1 \sim N(0,1)$ und $\zeta_2 \sim N(0,1)$ seien zwei unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Weiterhin seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ und $\rho \in]-1,1[$. Schließlich seien

$$\begin{aligned}\xi_1 &:= \sigma_1 \zeta_1 + \mu_1 \\ \xi_2 &:= \sigma_2 \left(\rho\zeta_1 + (1-\rho^2)^{1/2}\zeta_2\right) + \mu_2.\end{aligned} \tag{10}$$

Dann hat die WDF des Zufallsvektors $\xi := (\xi_1, \xi_2)^T$, also der gemeinsamen Verteilung von ξ_1 und ξ_2, die Form

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto p(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \tag{11}$$

wobei

$$n := 2, \mu := \begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{pmatrix} \text{ und } \Sigma := \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2\end{pmatrix} \tag{12}$$

Bemerkungen

- Für einen Beweis siehe DeGroot and Schervish (2012), S. 338-339.
- Man nennt die gemeinsame Verteilung von ξ_1 und ξ_2 *bivariate Normalverteilung*.

Konstruktion und Definition

Konstruktion bivariater Normalverteilungen

```
# Parameterdefinitionen
mu_1    = 5.0                                                  # \mu_1
mu_2    = 4.0                                                  # \mu_2
sig_1   = 1.5                                                  # \sigma_1
sig_2   = 1.0                                                  # \sigma_2
rho     = 0.9                                                  # \rho

# Realisierungen der standardnormalverteilten ZVen
nr      = 100                                                  # Anzahl Realisierungen
zeta_1 = rnorm(nr)                                             # \zeta_1 \sim N(0,1)
zeta_2 = rnorm(nr)                                             # \zeta_1 \sim N(0,1)

# Evaluation von Realisierungen von \xi_1 und \xi_2
xi_1    = sig_1*zeta_1 + mu_1                                  # Realsierungen von zeta_1
xi_2    = sig_2*(rho*zeta_1 + sqrt(1-rho^2)*zeta_2) + mu_2 # Realsierungen von zeta_2


# Parameter der gemeinsamen Verteilung von \xi_1 und \xi_2
mu      = matrix(c(mu_1,                                       # \mu \in \mathbb{R}^2
                   mu_2),
                   nrow = 2, byrow = TRUE)
Sigma   = matrix(c(sig_1^2          , rho*sig_1*sig_2,         # \Sigma \in \mathbb{R}^{2 x 2}
                 rho*sig_1*sig_2, sig_2^2),
                 nrow = 2, byrow = TRUE)
print(mu)
```

```
>      [,1]
> [1,]    5
> [2,]    4
```

```
print(Sigma)
```

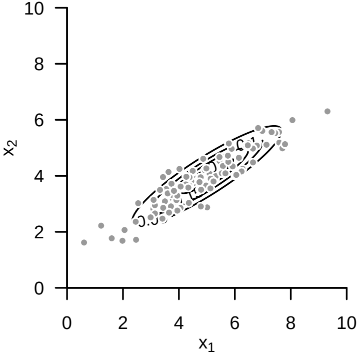
```
>      [,1] [,2]
> [1,] 2.25 1.35
> [2,] 1.35 1.00
```

Konstruktion und Definition

Konstruktion bivariater Normalverteilungen

- Realisierungen von $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$

– Isokonturen (Linien gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte) von p



Konstruktion und Definition

Definition (Multivariate Normalverteilung)

ξ sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^n$ und WDF

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto p(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right). \tag{13}$$

Dann sagen wird, dass ξ einer *multivariaten (oder n-dimensionalen) Normalverteilung* mit *Erwartungswertparameter* $\mu \in \mathbb{R}^m$ und positive-definitem *Kovarianzmatrixparameter* $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unterliegt und nennen ξ einen *(multivariat) normalverteilten Zufallsvektor*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim N(\mu, \Sigma)$ ab. Die WDF eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors bezeichnen wir mit

$$N(x; \mu, \Sigma) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right). \tag{14}$$

Bemerkungen

- Der Parameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ entspricht dem Wert höchster Wahrscheinlichkeitsdichte
- Die Diagonalelemente von Σ spezifizieren die Breite der WDF bezüglich $\xi_1, ..., \xi_n$.
- Das i, jte Element von Σ spezifiziert die Kovarianz on ξ_i und ξ_j.
- Der Term $(2\pi)^{-n/2}|\Sigma|^{-1/2}$ ist die Normalisierungskonstante für den Exponentialfunktionsterm.

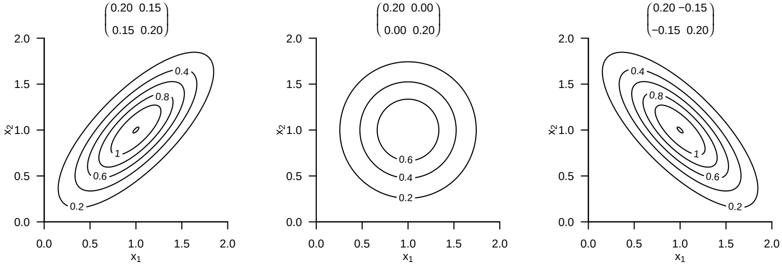
Konstruktion und Definition

Visualisierung bivariater Normalverteilungsdichtefunktionen

```
# multivariate Normalverteilungstools
# install.packages("mvtnorm")
library(mvtnorm)


# Ergebnisraumdefintion
x_min  = 0                                             # x_i Minimum
x_max  = 2                                             # x_i Maxim
x_res  = 1e3                                           # x_i Auflösung
x_1    = seq(x_min, x_max, length.out = x_res)         # x_1 Raum
x_2    = seq(x_min, x_max, length.out = x_res)         # x_2 Raum
X      = expand.grid(x_1,x_2)                          # X = (x_1,x_2)^T Raum

# Parameterdefinition
mu     = c(1,1)                                        # \mu \in \mathbb{R}^2
S      = list(matrix(c(0.2,  0.15,  0.15, 0.2), 2),    # \Sigma in \mathbb{R}^{2 \times 2}
              matrix(c(0.2,  0.00,  0.00, 0.2), 2),    # \Sigma in \mathbb{R}^{2 \times 2}
              matrix(c(0.2, -0.15, -0.15, 0.2), 2))    # \Sigma in \mathbb{R}^{2 \times 2}

# Kovarianzparametervariantenschleife
for (Sigma in S){

  # Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionauswertung
  p      = matrix(                                     # Matrixkonversion des von
                dmvnorm(as.matrix(X), mu, Sigma),      # dmvnorm() ausgegebenen Vektors
                nrow = x_res)

  # Visualisierung
  contour(
  x_1,
  x_2,
  p,
  xlim      =  c(x_min,x_max),
  ylim      =  c(x_min,x_max),
  nlevels   = 5)}
```

Visualisierung bivariater Normalverteilungsdichtefunktionen

$\mu = (1, 1)^T, \Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wie im Abbildungstitel vermerkt.



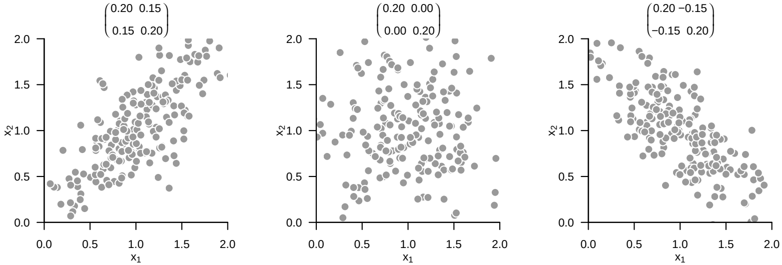
Realisierung bivariater normalverteilter Zufallsvektoren

```
# R Paket für multivariate Normalverteilungen
library(mvtnorm)

# Parameterdefinition
mu     = c(1,1)                                # \mu \in \mathbb{R}^2
Sigma  = matrix(c(0.2,  0.15,  0.15, 0.2), 2)  # \Sigma in \mathbb{R}^{2 \times 2}

# Zufallsvektorrealisierungen
t(rmvnorm(n = 10, mu, Sigma))
```

```
>      [,1]  [,2]   [,3]  [,4]  [,5]  [,6]  [,7] [,8] [,9] [,10]
> [1,] 1.08 0.921 0.0148 0.436 0.646 0.467 1.087 1.23 1.30 0.581
> [2,] 1.48 0.876 0.5765 0.540 1.700 0.649 0.627 1.13 1.27 1.116
```

Realisierung bivariater normalverteilter Zufallsvektoren

$\mu = (1,1)^T, \Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wie im Abbildungstitel vermerkt.



Theorem (Erwartungswert und Kovarianzmatrix)

$\xi \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein multivariate normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertparameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrixparameter $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ p.d. . Dann gelten für den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix von ξ, dass

$$\mathbb{E}(\xi) = \mu \text{ und } \mathbb{C}(\xi) = \Sigma, \tag{15}$$

respektive.

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Das Theorem ist die direkte Generalisierung der Eigenschaften univariater normalverteilter Zufallsvariablen

Kontinuierliche Zufallsvektoren

Konstruktion und Definition

Transformationen

Sphärische Verteilungen

Marginale und bedingte Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Theorem (Invertierbare lineare Transformation)

$\xi \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein normalverteilter n-dimensionaler Zufallsvektor und es sei $\upsilon := A\xi$ mit einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

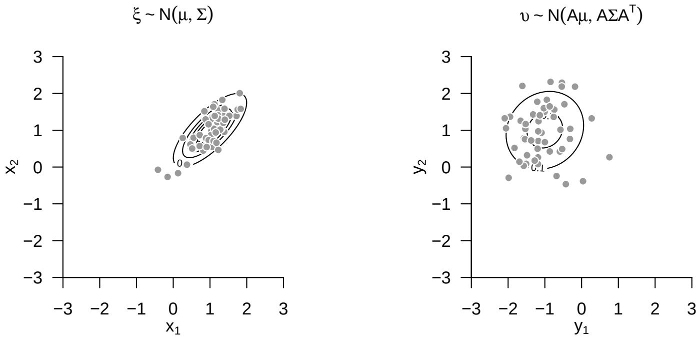
$$\upsilon \sim N\left(A\mu, A\Sigma A^T\right) \tag{16}$$

Bemerkung

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die invertierbare lineare Transformation eines multivariate normalverteilten Zuallsvektors ergibt wieder einer multivariate normalverteilten Zufallsvektor. Die Parameter des resultierenden normalverteilten Zufallsvektors ergeben sich dabei aus den Parametern des ursprünglichen Zufallsvektors und der Transformationsmatrix.

Invertierbare lineare Transformation

$$n := 2, \mu := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma := \begin{pmatrix} 0.20 & 0.15 \\ 0.15 & 0.20 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Theorem (Linear-affine Transformation)

$\xi \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein normalverteilter n-dimensionaler Zufallsvektor und es sei $\upsilon := A\xi + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\upsilon \sim N\left(A\mu + b, A\Sigma A^T\right) \tag{17}$$

Bemerkung

- Für einen Beweis siehe Anderson (2003), Section 2.4.
- Die linear-affine Transformation eines multivariate normalverteilten Zuallsvektors ergibt wieder ein normalverteilten Zufallsvektor. Die Parameter des resultierenden normalverteilten Zufallsvektors ergeben sich dabei aus den Parametern des ursprünglichen Zufallsvektors und der Transformationsparamter.

Kontinuierliche Zufallsvektoren

Konstruktion und Definition

Transformationen

Sphärische Verteilungen

Marginale und bedingte Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Sphärische Verteilungen

Theorem (Sphärische multivariate Normalverteilung)

Für $i = 1, \ldots, n$ seien $N(x_i; \mu_i, \sigma^2)$ die WDFen von n unabhängigen univariaten normalverteilten Zufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Weiterhin sei $N(x; \mu, \sigma^2 I_n)$ die WDF eines n-variaten Zufallsvektors ξ mit Erwartungswertparameter $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$p_\xi(x) = p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{\xi_i}(x_i) \tag{18}$$

und insbesondere

$$N\left(x; \mu, \sigma^2 I_n\right) = \prod_{i=1}^n N\left(x_i; \mu_i, \sigma^2\right). \tag{19}$$

Bemerkungen

- Das Theorem ist für die Theories des Allgemeinen Linearen Modells zentral.
- Die Zufallsvariablen ξ_i sind unabhängig, aber nicht notwendigerweise identisch, verteilt.
- Einen Kovarianzmatrixparameter der Form $\Sigma = \sigma^2 I_n$ nennt man auch *sphärisch*; eine multivariate Normalverteilung mit spährischem Kovarianzmatrixparameter nenn man auch *sphärische Normalverteilung*.
- Sphärische n-variate Normalverteilungen entsprechen n unabhängigen univariaten Normalverteilungen und umgekehrt; eine Realisierung einer n-variaten sphärischen Normalverteilung entspricht n Realisierungen von unabhängigen univariaten Normalverteilungen.

Beweis

Wir zeigen die Identität der multivariaten WDF $N(x;\mu,\sigma^2 I_n)$ mit dem Produkt von n univariaten WDFen $N(x_i;\mu_i,\sigma^2 I_n)$, wobei μ_i der $i$te Eintrag von $\mu \in \mathbb{R}^n$. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
N\left(x;\mu,\sigma^2 I_n\right) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left|\sigma^2 I_n\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T(\sigma^2 I_n)^{-1}(x-\mu)\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^n 2\pi^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^T(x-\mu)\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^n \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_i)^2\right) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu_i)^2\right) \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu_i)^2\right) \\
&= \prod_{i=1}^n N\left(x_i;\mu_i,\sigma^2\right).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Kontinuierliche Zufallsvektoren

Konstruktion und Definition

Transformationen

Sphärische Verteilungen

Marginale und bedingte Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Marginale und bedingte Verteilungen

Multivariate Normalverteilungen haben die Eigenschaft, dass auch alle anderen assoziierten Verteilung Normalverteilungen sind und deren Erwartungswert- und Kovarianzmatrixparameter aus den Parametern der jeweils komplementären Verteilung errechnet werden können.

Insbesondere gelten:

(1) Die uni- und multivariaten Marginalverteiltungen multivariater Normalverteilungen sind Normalverteilungen.
(2) Wie alle multivariaten Verteilungen lassen sich multivariate Normalverteilungen multiplikativ in eine marginale und eine bedingte Verteilung zerlegen. Insbesondere sind bei multivariaten Normalverteilungen diese Verteilungen auch Normalverteilungen, deren Parameter aus den Parametern der gemeinsame Verteilung errechnet werden können und umgekehrt.

Die Resultate dieses Abschnitts sind insbesondere für generalisierte ALMs im Sinne von Linear Mixed Models bzw. Hierarchischen Normalverteilungsmodellen, die Varianzkomponentenschätzung, und die Bayesianische Inferenz bei Normalverteilungsannahmen, inklusive z.B. Kalman-Bucy Filtering, zentral, spielen aber auch im Rahmen der partiellen Korrelation bei ALMs eine Rolle.

Marginale und bedingte Verteilungen

Theorem (Marginale Normalverteilungen)

Es sei $m := k + l$ und $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)^T$ sei ein m-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertparameter

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_\upsilon \\ \mu_\zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \tag{21}$$

mit $\mu_\upsilon \in \mathbb{R}^k$ and $\mu_\zeta \in \mathbb{R}^l$ und Kovarianzmatrixparameter

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{\upsilon\upsilon} & \Sigma_{\upsilon\zeta} \\ \Sigma_{\zeta\upsilon} & \Sigma_{\zeta\zeta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \tag{22}$$

mit $\Sigma_{\upsilon\upsilon} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $\Sigma_{\upsilon\zeta} \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $\Sigma_{\zeta\upsilon} \in \mathbb{R}^{l\times k}$, und $\Sigma_{\zeta\zeta} \in \mathbb{R}^{l\times l}$. Dann sind $\upsilon := (\xi_1, ..., \xi_k)^T$ und $\zeta := (\xi_{k+1}, ..., \xi_m)^T$ k- und l-dimensionale normalverteilte Zufallsvektoren, respektive, und es gilt

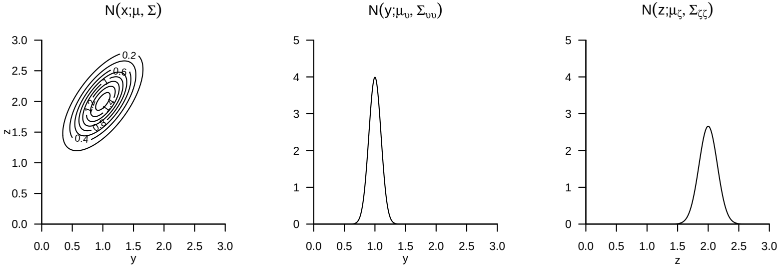
$$\upsilon \sim N(\mu_\upsilon, \Sigma_{\upsilon\upsilon}) \text{ and } \zeta \sim N(\mu_\zeta, \Sigma_{\zeta\zeta}), \tag{23}$$

Bemerkungen

- Die Marginalverteilungen einer multivariaten Normalverteilung sind auch Normalverteilungen.
- Die Parameter der Marginalverteilungen ergeben sich aus den Parametern der gemeinsamen Verteilung.
- Für Beweise, siehe z.B. Mardia, Kent, and Bibby (1979), Kapitel 3 oder Anderson (2003), Kapitel.

Marginale Normalverteilungen

$$m := 2, k = 1, l = 1, \mu := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma := \begin{pmatrix} 0.10 & 0.08 \\ 0.08 & 0.15 \end{pmatrix}$$



Marginale und bedingte Verteilungen

Theorem (Gemeinsame Normalverteilungen)

ξ sei ein m-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit WDF

$$p_\xi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto p_\xi(x) := N(x; \mu_\xi, \Sigma_{\xi\xi}) \text{ mit } \mu_\xi \in \mathbb{R}^m, \Sigma_{\xi\xi} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \tag{24}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sei eine Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ sei ein Vektor und υ sei ein n-dimensionaler bedingt normalverteilter Zufallsvektor mit bedingter WDF

$$p_{\upsilon|\xi}(\cdot|x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0},\ y \mapsto p_{\upsilon|\xi}(y|x) := N(y; A\xi + b, \Sigma_{\upsilon\upsilon}) \text{ mit } \Sigma_{\upsilon\upsilon} \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{25}$$

Dann ist der $m+n$-dimensionale Zufallsvektor $(\xi, \upsilon)^T$ normalverteilt mit (gemeinsamer) WDF

$$p_{\xi,\upsilon} : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}_{>0},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto p_{\xi,\upsilon}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \mu_{\xi,\upsilon}, \Sigma_{\xi,\upsilon}\right), \tag{26}$$

mit $\mu_{\xi,\upsilon} \in \mathbb{R}^{m+n}$ and $\Sigma_{\xi,\upsilon} \in \mathbb{R}^{m+n\times m+n}$ und insbesondere

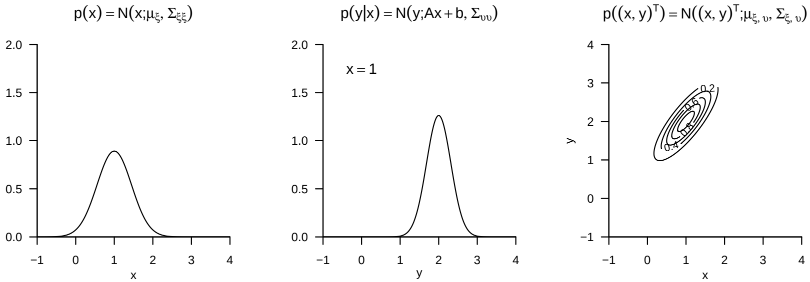
$$\mu_{\xi,\upsilon} = \begin{pmatrix} \mu_\xi \\ A\mu_\xi + b \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_{\xi,\upsilon} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\xi\xi} & \Sigma_{\xi\xi}A^T \\ A\Sigma_{\xi\xi} & \Sigma_{\upsilon\upsilon} + A\Sigma_{\xi\xi}A^T \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Bemerkungen

- Eine marginale und eine bedingte multivariate Normalverteilung induzieren eine gemeinsame Normalverteilung.
- Die Parameter der gemeinsamen Verteilungen ergeben sich als linear-affine Transformation der Parameter der induzierenden Verteilungen.

Gemeinsame Normalverteilungen

$$m := 1, n := 1, \mu_\xi := 1, \Sigma_{\xi\xi} := 0.2, A := 1, b := 1, \Sigma_{\upsilon\upsilon} := 0.1$$



Marginale und bedingte Verteilungen

Theorem (Bedingte Normalverteilungen)

(ξ, υ) sei ein $m+n$-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit WDF

$$p_{\xi,\upsilon} : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}_{>0}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto p_{\xi,\upsilon}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := N\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \mu_{\xi,\upsilon}, \Sigma_{\xi,\upsilon}\right), \tag{28}$$

mit

$$\mu_{\xi,\upsilon} = \begin{pmatrix} \mu_\xi \\ \mu_\upsilon \end{pmatrix}, \Sigma_{\xi,\upsilon} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\xi\xi} & \Sigma_{\xi\upsilon} \\ \Sigma_{\upsilon\xi} & \Sigma_{\upsilon\upsilon} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

mit $x, \mu_\xi \in \mathbb{R}^m, y, \mu_\upsilon \in \mathbb{R}^n$ and $\Sigma_{\xi\xi} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \Sigma_{\xi\upsilon} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \Sigma_{\upsilon\upsilon} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist die bedingte Verteilung von ξ gegeben υ eine m-dimensionale Normalverteilung mit bedingter WDF

$$p_{\xi|\upsilon}(\cdot|y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p_{\xi|\upsilon}(x|y) := N(x; \mu_{\xi|\upsilon}, \Sigma_{\xi|\upsilon}) \tag{30}$$

mit

$$\mu_{\xi|\upsilon} = \mu_\xi + \Sigma_{\xi\upsilon}\Sigma_{\upsilon\upsilon}^{-1}(y - \mu_\upsilon) \in \mathbb{R}^m \tag{31}$$

und

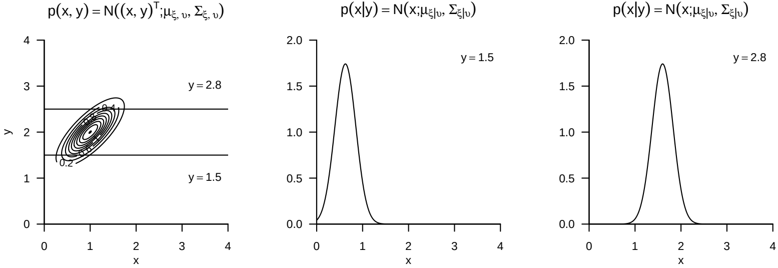
$$\Sigma_{\xi|\upsilon} = \Sigma_{\xi\xi} - \Sigma_{\xi\upsilon}\Sigma_{\upsilon\upsilon}^{-1}\Sigma_{\upsilon\xi} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{32}$$

Bemerkungen

- Die Parameter einer bedingten (multivariaten) Normalverteilung ergeben sich aus den Parametern einer gemeinsamen multivariaten Normalverteilung. Im Zusammenspiel mit den vorherigen Theoremen können die Parameter bedingter und marginale Normalverteilungen aus den Parametern der komplementären bedingten und marginalen Normalverteilungen bestimmt werden.

Bedingte Normalverteilungen

$$m := 2, n := 1, \mu := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma := \begin{pmatrix} 0.12 & 0.09 \\ 0.09 & 0.12 \end{pmatrix}$$



Kontinuierliche Zufallsvektoren

Konstruktion und Definition

Transformationen

Sphärische Verteilungen

Marginale und bedingte Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definitionen des Erwartungswerts und der Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors wieder.
2. Was repräsentieren die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors?
3. Was repräsentieren die Nichtdiagonalelemente der Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors?
4. Definieren Sie die WDF eines multivariaten normalverteilten Zufallsvektors wieder und erläutern Sie diese.
5. Welche Werte haben der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors?
6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten

$$\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

7. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.
8. Geben Sie das Theorem zur invertierbaren linearen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.
9. Geben Sie das Theorem zur linear-affinen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.
10. Geben Sie das Theorem zu sphärischen Normalverteilungen wieder.
11. Erläutern Sie den Begriff des sphärischen Kovarianzmatrixparameters.
12. Skizzieren Sie den Beweis des Theorems zu sphärischen Normalverteilungen.

Referenzen

Anderson, T. W. 2003. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 3rd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, N.J: Wiley-Interscience.

DeGroot, Morris H., and Mark J. Schervish. 2012. *Probability and Statistics*. 4th ed. Boston: Addison-Wesley.

Mardia, K. V., J. T. Kent, and J. M. Bibby. 1979. *Multivariate Analysis*. Probability and Mathematical Statistics. London ; New York: Academic Press.