Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2022

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(4) Normalverteilungen

Überblick

Die multivariate Normalverteilung ist zentraler Bestandteil des ALMs.

Die multivariate Normalverteilung ist die multivariate Generalisierung der univariaten Normalverteilung.

Die Motivation von Normalverteilungsannahmen liegt immer im Zentralen Grenzwertsatz:

- Probabilistische Terme repräsentieren die Summation sehr vieler Prozesse, die durch die deterministischen Bestandteile eines Modell, also eine mechanistische wissenschaftliche Theorie, nicht erklärt werden.
- Nach dem Zentralen Grenzwertsatz ist die Summe dieser Prozesse normalverteilt.

Darüberhinaus hat die Normalverteilung günstige mathematische Eigenschaften, die auch in der Quantifikation subjektiver Unsicherheit genutzt werden können. Zur Erarbeitung der Inhalte dieser Einheit bietet sich eine Revision von (5) Multivariate Verteilungen aus Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz an

Definition und Eigenschaften

Transformationen

Unabhängigkeit

Gemeinsame Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Definition und Eigenschaften

Definition (Multivariate Normalverteilung)

y sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^n$ und WDF

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0},\ \upsilon \mapsto p(\upsilon) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\upsilon-\mu)^T\Sigma^{-1}(\upsilon-\mu)\right). \quad (1)$$

Dann sagen wird, dass y einer *multivariaten (oder n-dimensionalen) Normalverteilung* mit *Erwartungswertparameter* $\mu \in \mathbb{R}^n$ und positive-definitem *Kovarianzmatrixparameter* $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unterliegt und nennen y einen *(multivariat) normalverteilten Zufallsvektor*. Wir kürzen dies mit $y \sim N(\mu, \Sigma)$ ab. Die WDF eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors bezeichnen wir mit

$$N(\upsilon; \mu, \Sigma) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\upsilon-\mu)^T\Sigma^{-1}(\upsilon-\mu)\right). \quad (2)$$

Bemerkungen

- Man beachte, dass wir für Zufallsvektoren von nun an auch kleine Buchstaben zulassen.
- υ ist das kleine griechische Ypsilon.
- Die Dimensionalität von $(\upsilon-\mu)^T\Sigma^{-1}(\upsilon-\mu)$ ergibt sich zu $(1 \times n)(n \times n)(n \times 1) = 1$
- Es gilt weiterhin $(\upsilon-\mu)^T\Sigma^{-1}(\upsilon-\mu) > 0$, weil auch Σ^{-1} positiv-definit ist.
- Der Parameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ entspricht dem Wert höchster Wahrscheinlichkeitsdichte
- Der Term $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$ ist die Normalisierungskonstante für den Exponentialfunktionsterm.

Definition (Erwartungswert und Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren)

y sei ein n-dimensionaler Zufallvektor. Dann ist der *Erwartungwert* von y definiert als der n-dimensionale Vektor

$$\mathbb{E}(y) := (\mathbb{E}(y_1), ..., \mathbb{E}(y_n))^T \tag{3}$$

und die *Kovarianzmatrix* von y ist definiert als die $n \times n$ Matrix

$$\mathbb{C}(y) := \mathbb{E}\left((y - \mathbb{E}(y))(y - \mathbb{E}(y))^T\right) \tag{4}$$

Bemerkungen

- Der Erwartungswert von y ist der Vektor der Erwartungswerte $\mathbb{E}(y_1), ..., \mathbb{E}(y_n)$.
- Die Kovarianzmatrix ist formal analog zur Kovarianz zweier Zufallsvariablen definiert.

Theorem (Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors)

y sei ein n-dimensionaler Zufallvektor und $\mathbb{C}(y)$ sei seine Kovarianzmatrix. Dann gilt

$$\mathbb{C}(y) = \Big(\mathbb{C}(y_i, y_j)\Big)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}(y_1, y_1) & \mathbb{C}(y_1, y_2) & \cdots & \mathbb{C}(y_1, y_n) \\ \mathbb{C}(y_2, y_1) & \mathbb{C}(y_2, y_2) & \cdots & \mathbb{C}(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}(y_n, y_1) & \mathbb{C}(y_n, y_2) & \cdots & \mathbb{C}(y_n, y_n) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Bemerkung

- Die Kovarianzmatrix $\mathbb{C}(y)$ ist also die Matrix der Kovarianzen der Komponenten von y.

Beweis

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}(y) &:= \mathbb{E}\left((y-\mathbb{E}(y))(y-\mathbb{E}(y))^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}(y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(y_n) \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}(y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(y_n) \end{pmatrix}\right)^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} y_1 - \mathbb{E}(y_1) \\ \vdots \\ y_n - \mathbb{E}(y_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 - \mathbb{E}(y_1) \\ \vdots \\ y_n - \mathbb{E}(y_n) \end{pmatrix}^T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\begin{pmatrix} y_1 - \mathbb{E}(y_1) \\ \vdots \\ y_n - \mathbb{E}(y_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 - \mathbb{E}(y_1) & \dots & y_n - \mathbb{E}(y_n) \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathbb{E}\begin{pmatrix} (y_1 - \mathbb{E}(y_1))(y_1 - \mathbb{E}(y_1)) & \dots & (y_1 - \mathbb{E}(y_1))(y_n - \mathbb{E}(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_n - \mathbb{E}(y_n))(X_1 - \mathbb{E}(y_1)) & \dots & (y_n - \mathbb{E}(y_n))(X_n - \mathbb{E}(y_n)) \end{pmatrix} \\
&= \left(\mathbb{E}\left((y_i - \mathbb{E}(y_i))(y_j - \mathbb{E}(y_j))\right)\right)_{1 \le i,j \le n} \\
&= \left(\mathbb{C}(y_i, y_j)\right)_{1 \le i,j \le n}
\end{aligned}
$$

Definition und Eigenschaften

Theorem (Erwartungswert eines normalverteilten Zufallsvektors)

$y \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertparameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrixparameter $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ p.d.. Dann gilt

$$\mathbb{E}(y) = \mu. \tag{6}$$

Bemerkungen

- Der Erwartungswert eines normalverteilten Zufallsvektors entspricht seinem Erwartungswertparameter.
- Wir verzichten auf einen Beweis.

Theorem (Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors)

$y \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertparameter $\mu \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrixparameter $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ p.d..Dann gilt

$$\mathbb{C}(y) = \Sigma. \tag{7}$$

Bemerkungen

- Die Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors entspricht seinem Kovarianzmatrixparameter.
- Wir verzichten auf einen Beweis.

Theorem (Bivariate Normalverteilung)

Ein 2-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor $y = (y_1, y_2)^T$ mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^2$, Erwarungswert und Kovarianzmatrixparameter

$$\mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ p.d.,} \tag{8}$$

respektive, hat bei Definition von

$$\rho := \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}^2 \sigma_{22}^2} \tag{9}$$

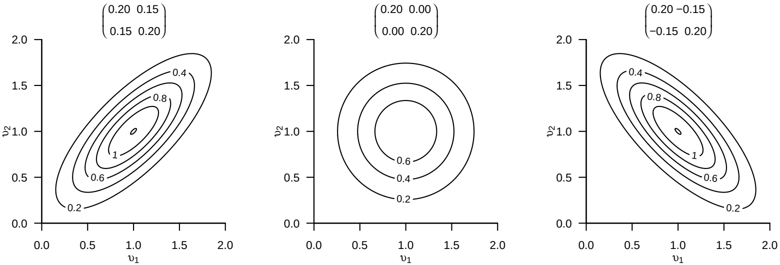
die WDF

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{>0}, \upsilon \mapsto p(\upsilon) = N(\upsilon; \mu, \Sigma) \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned} N(\upsilon; \mu, \Sigma) = & \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}\sigma_{11}\sigma_{22}} \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right) + \left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Bivariate Normalverteilungsdichtefunktionen



Definition und Eigenschaften

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass aufgrund der positiven Definitheit und damit der Symmetrie von Σ gilt, dass

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2. \tag{11}$$

Die Inverse von Σ ist gegeben durch

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^4}\begin{pmatrix} \sigma_{22}^2 & -\sigma_{12}^2 \\ -\sigma_{12}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

weil

$$\begin{aligned}
\Sigma^{-1}\Sigma &= \frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^4}\begin{pmatrix} \sigma_{22}^2 & -\sigma_{12}^2 \\ -\sigma_{12}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^4}\begin{pmatrix} \sigma_{22}^2\sigma_{11}^2 - \sigma_{12}^2\sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2\sigma_{12}^2 - \sigma_{12}^2\sigma_{22}^2 \\ -\sigma_{12}^2\sigma_{11}^2 + \sigma_{11}^2\sigma_{21}^2 & -\sigma_{12}^2\sigma_{12}^2 + \sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^4}\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2\sigma_{11}^2 - \sigma_{12}^4 & 0 \\ 0 & \sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - \sigma_{12}^4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_2
\end{aligned} \tag{13}$$

Definition und Eigenschaften

Beweis (fortgeführt)

Mit

$$\rho = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \Rightarrow \rho = \frac{\sigma_{21}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \Rightarrow \sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \rho\sigma_{11}\sigma_{22} \tag{14}$$

lässt sich Σ^{-1} weiterhin schreiben als

$$\begin{aligned}\Sigma^{-1} &= \frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 - (\rho\sigma_{11}\sigma_{22})^2}\begin{pmatrix} \sigma_{22}^2 & -\rho\sigma_{11}\sigma_{22} \\ -\rho\sigma_{11}\sigma_{22} & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} \sigma_{22}^2 & -\rho\sigma_{11}\sigma_{22} \\ -\rho\sigma_{11}\sigma_{22} & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

Schließlich ergibt sich

$$|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} = \left(|\Sigma|^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\Sigma^{-1}\right|^{-\frac{1}{2}} = \left(\sigma_{22}^2\sigma_{11}^2 - \rho_{12}^2\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\sigma_{22}\sigma_{11}\sqrt{(1-\rho^2)}\right)^{-1}. \tag{16}$$

Definition und Eigenschaften

Beweis (fortgeführt)

Einsetzen ergibt dann

$$
\begin{aligned}
N(\upsilon;\mu,\Sigma) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\upsilon-\mu)^T\Sigma^{-1}(\upsilon-\mu)\right)\\
&= (2\pi)^{-\frac{2}{2}}\left(\sigma_{22}\sigma_{11}\sqrt{(1-\rho^2)}\right)^{-1}\\
&\times\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\sigma_{12}^4}\begin{pmatrix}\upsilon_1-\mu_1 & \upsilon_2-\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{22}^2 & -\sigma_{12}^2\\ -\sigma_{12}^2 & \sigma_{11}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\upsilon_1-\mu_1\\ \upsilon_2-\mu_2\end{pmatrix}\right).\\
&= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}\sigma_{11}\sigma_{22}}\\
&\times\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2-2\rho\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)+\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2\right)\right),
\end{aligned}
$$

wobei sich die letzte Gleichung mit der Definition der Matrixmultiplikation ergibt.

Realisierung bivariater normalverteilter Zufallsvektoren

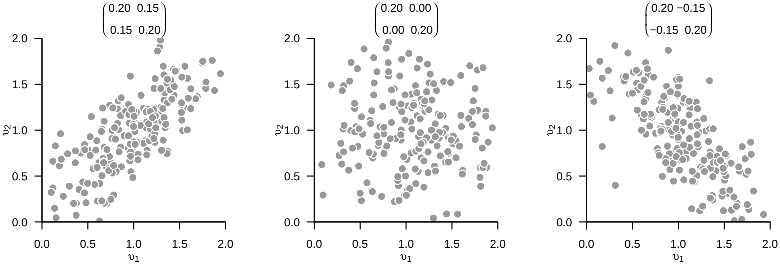
```
# R Paket für multivariate Normalverteilungen
library(mvtnorm)

# Parameterdefinition
mu      = c(1,1)                                # \mu \in \mathbb{R}^2
Sigma   = matrix(c(0.2,  0.15,  0.15, 0.2), 2)  # \Sigma in \mathbb{R}^{2 \times 2}

# Zufallsvektorrealisierungen
rmvnorm(n = 10, mu, Sigma)
```

```
>          [,1]  [,2]
>  [1,] 0.47631 0.846
>  [2,] 0.00553 0.549
>  [3,] 1.46466 1.582
>  [4,] 0.21191 0.564
>  [5,] 0.84844 0.840
>  [6,] 0.89004 1.154
>  [7,] 1.54162 0.715
>  [8,] 0.86607 0.335
>  [9,] 0.77755 0.883
> [10,] 1.05314 0.727
```

Realisierung bivariater normalverteilter Zufallsvektoren



Definition

Transformationen

Unabhängigkeit

Gemeinsame Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Theorem (Nichtsinguläre lineare Transformation)

$x \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein normalverteilter n-dimensionaler Zufallsvektor und es sei $y := Ax$ mit einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

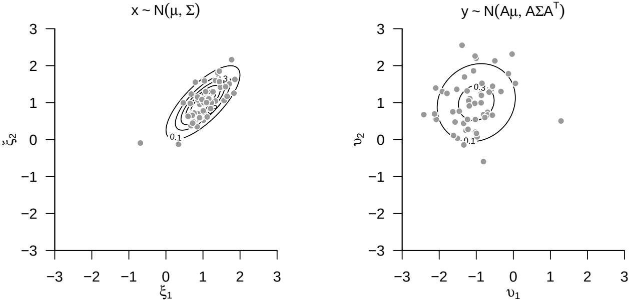
$$y \sim N\left(A\mu, A\Sigma A^T\right) \tag{17}$$

Bemerkung

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die invertierbare lineare Transformation eines multivariate normalverteilten Zuallsvektors ergibt wieder einer multivariate normalverteilten Zufallsvektor. Die Parameter des resultierenden normalverteilten Zufallsvektors ergeben sich dabei aus den Parametern des ursprünglichen Zufallsvektors und der Transformationsmatrix.

Nichtsinguläre lineare Transformation

$$n := 2, \mu := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma := \begin{pmatrix} 0.20 & 0.15 \\ 0.15 & 0.20 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Theorem (Linear-affine Transformation)

$x \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein normalverteilter n-dimensionaler Zufallsvektor und es sei $y := Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$y \sim N\left(A\mu + b, A\Sigma A^T\right) \tag{18}$$

Bemerkung

- Für einen Beweis siehe Anderson (2003), Section 2.4.
- Die linear-affine Transformation eines multivariate normalverteilten Zuallsvektors ergibt wieder ein normalverteilten Zufallsvektor. Die Parameter des resultierenden normalverteilten Zufallsvektors ergeben sich dabei aus den Parametern des ursprünglichen Zufallsvektors und der Transformationsparamter.

Definition

Transformationen

Unabhängigkeit

Gemeinsame Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Theorem (Unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen)

Für $i = 1, ..., n$ seien $N(\upsilon; \mu_i, \sigma^2)$ die WDFen von n unabhängigen univariaten normalverteilten Zufallsvariablen $y_1, ..., y_n$ mit $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Weiterhin sei $N(\upsilon; \mu, \sigma^2 I_n)$ die WDF eines n-variaten Zufallsvektors y mit Erwartungswertparameter $\mu := (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$p_y(\upsilon) = p_{y_1,...,y_n}(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) \tag{19}$$

und insbesondere

$$N\left(\upsilon; \mu, \sigma^2 I_n\right) = \prod_{i=1}^{n} N\left(\upsilon_i; \mu_i, \sigma^2\right). \tag{20}$$

Bemerkungen

- Das Theorem ist für die Theories des Allgemeinen Linearen Modells zentral.
- Einen Kovarianzmatrixparameter der Form $\sigma^2 I_n$ nennt man auch *sphärisch*.
- Sphärische Kovarianzmatrixparamter von n-variaten Normalverteilungen entsprechen n unabhängigen univariaten Normalverteilungen und umgekehrt. Eine Realisierung einer n-variaten Normalverteilungen entspricht Realisierungen von n unabhängigen univariaten Normalverteilungen.

Unabhängigkeit

Beweis

Wir zeigen die Identität der multivariaten WDF $N(\upsilon;\mu,\sigma^2 I_n)$ mit dem Produkt von n univariaten WDFen $N(\upsilon_i;\mu_i,\sigma^2 I_n)$, wobei μ_i der $i$te Eintrag von $\mu \in \mathbb{R}^n$. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
N\left(\upsilon;\mu,\sigma^2 I_n\right) & = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left|\sigma^2 I_n\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\upsilon-\mu)^T(\sigma^2 I_n)^{-1}(\upsilon-\mu)\right) \\
& = \left(\prod_{i=1}^n 2\pi^{-\frac{1}{2}}\right)(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\upsilon-\mu)^T(\upsilon-\mu)\right) \\
& = \left(\prod_{i=1}^n \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(\upsilon_i-\mu_i)^2\right) \\
& = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\upsilon_i-\mu_i)^2\right) \\
& = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\upsilon_i-\mu_i)^2\right) \\
& = N\left(\upsilon_i;\mu_i,\sigma^2\right).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Definition

Transformationen

Unabhängigkeit

Gemeinsame Verteilungen

Selbstkontrollfragen

Gemeinsame Verteilungen

Multivariate Normalverteilungen haben die Eigenschaft, dass auch alle anderen assoziierten Verteilung Normalverteilungen sind und deren Erwartungswert- und Kovarianzmatrixparameter aus den Parametern der jeweils komplementären Verteilung errechnet werden können.

Insbesondere gilt:

- Die uni- und multivariaten Marginalverteiltungen multivariater Normalverteilungen sind Normalverteilungen.
- Wie alle multivariaten Verteilungen lassen sich multivariate Normalverteilungen multiplikativ in eine marginale und eine bedingte Verteilung zerlegen. Insbesondere sind bei multivariaten Normalverteilungen diese Verteilungen auch Normalverteilungen, deren Parameter aus den Parametern der gemeinsame Verteilung errechnet werden können und umgekehrt.

Die Resultate dieses Abschnitts sind insbesondere für generalisierte ALMs im Sinne von Linear Mixed Models bzw. Hierarchischen Normalverteilungsmodellen, die Varianzkomponentenschätzung, und die Bayesianische Inferenz bei Normalverteilungsannahmen, aber auch die partielle Korrelation zentral.

Theorem (Marginale Normalverteilungen)

Es sei $n := k + l$ und $x = (x_1, ..., x_n)$ sei ein n-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertparameter

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tag{22}$$

mit $\mu_y \in \mathbb{R}^k$ and $\mu_z \in \mathbb{R}^l$ und Kovarianzmatrixparameter

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tag{23}$$

mit $\Sigma_{yy} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\Sigma_{yz} \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $\Sigma_{zy} \in \mathbb{R}^{l \times k}$, und $\Sigma_{zz} \in \mathbb{R}^{l \times l}$. Dann sind $y := (x_1, ..., x_k)$ und $z := (x_{k+1}, ..., x_n)$ k- und l-dimensionale normalverteilte Zufallsvektoren, respektive, und es gilt

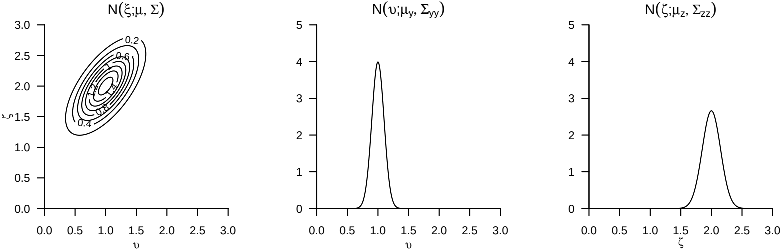
$$y \sim N(\mu_y, \Sigma_{yy}) \text{ and } z \sim N(\mu_z, \Sigma_{xx}), \tag{24}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis
- Die Marginalverteilungen einer multivariaten Normalverteilung sind auch Normalverteilungen, insbesondere sind die eindimensionalen Marginalverteilungen einer multivariaten Normalverteilung univariate Normalverteilungen.
- Die Parameter der Marginalverteilungen ergeben sich aus den Parametern der gemeinsamen Verteilung.

Marginale Normalverteilungen

$$n := 2, k = 1, l = 1, \mu := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma := \begin{pmatrix} 0.10 & 0.08 \\ 0.08 & 0.15 \end{pmatrix}$$



Theorem (Gemeinsame Normalverteilungen)

x sei ein m-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit WDF

$$p_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{>0},\ \xi \mapsto p_x(\xi) := N(\xi; \mu_x, \Sigma_{xx}) \text{ mit } \mu_x \in \mathbb{R}^m, \Sigma_{xx} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \tag{25}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sei eine Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ sei ein Vektor und y sei ein n-dimensionaler bedingt normalverteilter Zufallsvektor mit bedingter WDF

$$p_{y|x}(\cdot|\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0},\ y \mapsto p_{y|x}(\upsilon|\xi) := N(\upsilon; AX + b, \Sigma_{yy}) \text{ mit } \Sigma_{yy} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{26}$$

Dann ist der $m + n$-dimensionale Zufallsvektor (x, y) normalverteilt mit (gemeinsamer) WDF

$$p_{x,y} : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}_{>0},\ (\xi, \upsilon) \mapsto p_{x,y}(\xi, \upsilon) = N\left((\xi, \upsilon); \mu_{x,y}, \Sigma_{x,y}\right), \tag{27}$$

mit $\mu_{x,y} \in \mathbb{R}^{n+m}$ and $\Sigma_{x,y} \in \mathbb{R}^{m+n \times m+n}$ und insbesondere

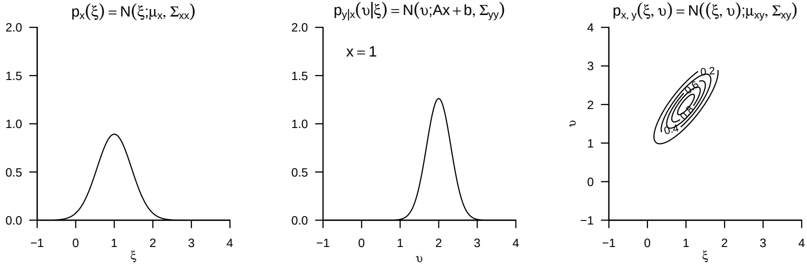
$$\mu_{x,y} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ A\mu_x + b \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_{x,y} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xx}A^T \\ A\Sigma_{xx} & \Sigma_{yy} + A\Sigma_{xx}A^T \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Eine marginale und eine bedingte multivariate Normalverteilung induzieren eine gemeinsame Normalverteilung.
- Die Parameter der gemeinsamen Verteilungen ergeben sich als linear-affine Transformation der Parameter der induzierenden Verteilungen.

Gemeinsame Verteilungen

$$m := 1, n := 1, \mu_x := 1, \Sigma_{xx} := 0.2, A := 1, b := 1, \Sigma_{yy} := 0.1$$



Theorem (Bedingte Normalverteilungen)

(x, y) sei ein $m + n$-dimensionaler normalverteilter Zufallsvektor mit WDF

$$p_{x,y} : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}_{>0}, (\xi, \upsilon) \mapsto p_{x,y}(\xi, \upsilon) := N\left((\xi, \upsilon); \mu_{x,y}, \Sigma_{x,y}\right), \tag{29}$$

mit

$$\mu_{x,y} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \Sigma_{x,y} = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

mit $x, \mu_x \in \mathbb{R}^m, y, \mu_y \in \mathbb{R}^n$ and $\Sigma_{xx} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \Sigma_{xy} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \Sigma_{yy} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist die bedingte Verteilung von x gegeben y eine m-dimensionale Normalverteilung mit bedingter WDF

$$p_{x|y}(\cdot|\upsilon) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p_{x|y}(\xi|\upsilon) := N(\xi; \mu_{x|y}, \Sigma_{x|y}) \tag{31}$$

mit

$$\mu_{x|y} = \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(Y - \mu_y) \in \mathbb{R}^m \tag{32}$$

und

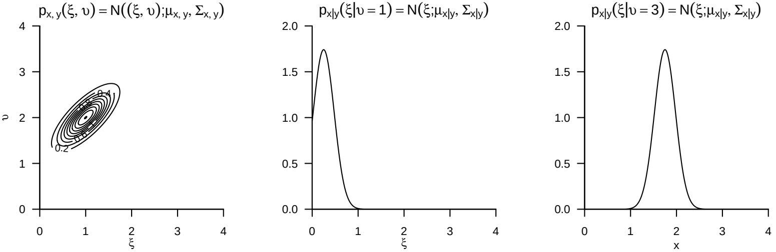
$$\Sigma_{x|y} = \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} \in \mathbb{R}^{m \times m}. \tag{33}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Die Parameter einer bedingten (multivariaten) Normalverteilung ergeben sich aus den Parameter einer gemeinsamen multivariaten Normalverteilung. Im Zusammenspiel mit den vorherigen Theoremen können die Parameter bedingter und marginale Normalverteilungen aus den Parametern der komplementären bedingten und marginalen Normalverteilungen bestimmt werden.

Bedingte Normalverteilungen

$$m := 2, n := 1, \mu := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma := \begin{pmatrix} 0.12 & 0.09 \\ 0.09 & 0.12 \end{pmatrix}$$



Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie die WDF eines multivariaten normalverteilten Zufallsvektors wieder und erläutern Sie diese.
2. Geben Sie die Definitionen des Erwartungswerts und der Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors wieder.
3. Was repräsentieren die Elemente einer Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors?
4. Welche Werte haben der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors?
5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.
6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten

$$\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

   Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.
7. Geben Sie das Theorem zur nichtsingulären linearen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.
8. Geben Sie das Theorem zur linear-affinen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.
9. Geben Sie das Theorem zu Unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder.
10. Erläutern Sie den Begriff des sphärischen Kovarianzmatrixparameters.
11. Skizzieren Sie den Beweis des Theorem zu Unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen.

References

Anderson, T. W. 2003. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. 3rd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, N.J: Wiley-Interscience.