Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2022

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(3) Matrizen

Motivation

Matrizen sind die Worte der Sprache des Allgemeinen Linearen Modells

Die Modellformulierung des Allgemeinen Lineare Models basiert auf Matrizen:

- Experimentelle Designs sind spezielle Matrizen.
- Datensätze sind spezielle Matrizen.
- Modellparameter sind spezielle Matrizen.
- Probabilistische Annahmen sind in Kovarianzmatrizen kodiert.

Modelschätzung und Modellevaluation geschieht mithilfe der Matrizenrechnung.

Ein sicherer Umgang mit Matrizen ist für

das Verständnis des Allgemeinen Linearen Modells unverzichtbar.

Definition

Operationen

Determinanten

Rang

Spezielle Matrizen

Selbstkontrollfragen

Definition (Matrix)

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen, die wie folgt bezeichnet wird

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m}. \tag{1}$$

Bemerkungen

- Matrizen bestehen aus *Zeilen (rows)* und *Spalten (columns)*.
- Die Matrixeinträge a_{ij} werden mit einem *Zeilenindex* i und einem *Spaltenindex* j indiziert.
- Zum Beispiel gilt für $A := \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 9 \\ 9 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dass $a_{32} = 4$.

Definition

Bemerkungen (fortgeführt)

- Die *Größe* oder *Dimension* einer Matrix ergibt sich aus der Anzahl ihrer Zeilen $n \in \mathbb{N}$ und Spalten $m \in \mathbb{N}$.
- Matrizen mit $n = m$ heißen *quadratische Matrizen*.
- In der Folge benötigen wir nur Matrizen mit reellen Einträgen, also $a_{ij} \in \mathbb{R} \, \forall i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$.
- Wir nennen die Matrizen mit reellen Einträge *reelle Matrizen*.
- Die Menge der reellen Matrizen mit n Zeilen und m Spalten bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{n \times m}$
- Aus dem Ausdruck $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ lesen wir ab, dass A eine reelle Matrix mit zwei Zeilen und drei Spalten ist.
- Wir identifizieren die Menge $\mathbb{R}^{1 \times 1}$ mit der Menge $\mathbb{R}$.
- Wir identifizieren die Menge $\mathbb{R}^{n \times 1}$ mit der Menge $\mathbb{R}^n$.
- Reelle Matrizen mit einer Spalte und n Zeilen sind also dasselbe wie n-dimensionale reelle Vektoren.

Definition

Operationen

Determinanten

Rang

Spezielle Matrizen

Selbstkontrollfragen

Matrixoperationen

Man kann mit Matrizen rechnen.

In der Folge betrachten wir folgende grundlegende Matrixoperationen

- Addition und Subtraktion von Matrizen gleicher Größe (Matrixaddition und Matrixsubtraktion)
- Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar (Skalarmultiplikation)
- Vertauschen der Zeilen- und Spaltenanordnung (Matrixtransposition)
- Multiplikation einer Matrix mit einer passenden zweiten Matrix (Matrixmultiplikation)
- “Teilen” durch eine Matrix (Matrixinversion)

Definition (Matrixaddition)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann ist die *Addition* von A und B definiert als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{n\times m},\ (A, B) \mapsto +(A, B) := A + B \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Bemerkungen

- Nur Matrizen identischer Größe können miteinander addiert werden.
- Die Addition zweier gleich großer Matrizen ist elementweise definiert.

Definition (Matrixsubtraktion)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Subtraktion* von A und B definiert als die Abbildung

$$-: \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{n\times m},\ (A, B) \mapsto -(A, B) := A - B \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Bemerkungen

- Nur Matrizen identischer Größe können voneinander subtrahiert werden.
- Die Subktration zweier gleich großer Matrizen ist elementweise definiert.

Operationen

Beispiel

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Da A und B gleich groß sind, können wir sie addieren

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+4 & -3+1 & 0+0 \\ 1-4 & 6+2 & 5+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

und voneinander subtrahieren

$$\begin{aligned} D = A - B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-4 & -3-1 & 0-0 \\ 1+4 & 6-2 & 5-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Beispiel

```r
# Spaltenweise Definition von A (R default)
A = matrix(c(2,1,-3,6,0,5), nrow = 2)
print(A)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    2   -3    0
> [2,]    1    6    5
```

```r
# Zeilenweise Definition von B
B = matrix(c(4,1,0,-4,2,0), nrow = 2, byrow = TRUE)
print(B)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    4    1    0
> [2,]   -4    2    0
```

Operationen

Beispiel

```r
# Addition
C = A + B
print(C)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    6   -2    0
> [2,]   -3    8    5
```

```r
# Subtraktion
D = A - B
print(D)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]   -2   -4    0
> [2,]    5    4    5
```

Definition (Skalarmultiplikation)

Es sei $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Skalarmultiplikation* von c und A definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ (c, A) \mapsto \cdot(c, A) := cA \tag{9}$$

mit

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1m} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nm} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Bemerkungen

- Die Skalarmultiplikation ist elementweise definiert.

Operationen

Beispiel

Es seien $c := -3$ und $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Dann ergibt sich

$$B := cA = -3\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 3 & -3\cdot 1 & -3\cdot 1 \\ -3\cdot 5 & -3\cdot 2 & -3\cdot 5 \\ -3\cdot 2 & -3\cdot 7 & -3\cdot 1 \\ -3\cdot 3 & -3\cdot 4 & -3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -3 \\ -15 & -6 & -15 \\ -6 & -21 & -3 \\ -9 & -12 & -6 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Operationen

Beispiel

```r
# Definitionen
A = matrix(c(3,1,1,
             5,2,5,
             2,7,1,
             3,4,2),
           nrow = 4,
           byrow = TRUE)
c = -3

# Skalarmultiplikation
B = c*A
print(B)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]   -9   -3   -3
> [2,]  -15   -6  -15
> [3,]   -6  -21   -3
> [4,]   -9  -12   -6
```

Theorem (Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times m}$)

Das Tripel $(\mathbb{R}^{n\times m}, +, \cdot)$ mit der oben definierten Matrixaddition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum. Insbesondere gelten also für $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $r, s, t \in \mathbb{R}$ folgende Rechenregeln:

(1) Kommutativität der Addition $\quad A + B = B + A$

(2) Assoziativität der Addition $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$

(3) Existenz eines neutralen Elements der Addition $\quad \exists\, 0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $A + 0 = 0 + A = A.$

(4) Existenz inverser Elemente der Addition $\quad \forall A\, \exists - A$ mit $A + (-A) = 0.$

(5) Existenz eines neutralen Elements der Skalarmultiplikation $\quad \exists\, 1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \cdot A = A.$

(6) Assoziativität der Skalarmultiplikation $\quad r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t.$

(7) Distributivität hinsichtlich der Matrixaddition $\quad r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B.$

(8) Distributivität hinsichtlich der Skalaraddition $\quad (r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A.$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Der Beweis ergibt sich mit dem elementweisen Charakter von $+, -, \cdot$ und den Rechenregeln in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- Das neutrale Element der Addition heißt *Nullmatrix*; wir schreiben $0_{nm} := (0)_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ mit $0 \in \mathbb{R}$.
- Die inversen Elemente der Addition sind durch $-A := (-a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ gegeben.
- Das neutrale Element der Skalarmultiplikation ist $1 \in \mathbb{R}$.

Definition (Matrixtransposition)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann ist die *Transposition* von A definiert als die Abbildung

$$\cdot^T : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{m\times n},\ A \mapsto \cdot^T(A) := A^T \tag{13}$$

mit

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Bemerkungen

- Die Matrixtransposition "vertauscht" Zeilen und Spalten.
- Für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt immer $A^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Für $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ gilt immer $A^T = A$.
- Es gilt $\left(A^T\right)^T = A$.
- Es gilt $(a_{ii})_{1\le i\le \min(n,m)} = (a_{ii})^T_{1\le i\le \min(n,m)}$
- Matrixelemente auf der Hauptdiagonalen einer Matrix bleiben bei Transposition also unberührt.

Beispiel

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

Dann gilt $A^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und speziell

$$A^T := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Weiterhin gilt offenbar $\min(m,n) = 2$ und folglich

$$(a_{11}) = (a_{11})^T \text{ und } (a_{22}) = (a_{22})^T . \tag{17}$$

Operationen

Beispiel

```r
# Definition
A = matrix(c(2,3,0,
             1,6,5),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)
print(A)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    2    3    0
> [2,]    1    6    5
```

```r
# Transposition
AT = t(A)
print(AT)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]    2    1
> [2,]    3    6
> [3,]    0    5
```

Definition (Matrixmultiplikation)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$. Dann ist die *Matrixmultiplikation* von A und B definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times k} \to \mathbb{R}^{n \times k},\ (A, B) \mapsto \cdot(A, B) := AB \tag{18}$$

mit

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} \\
&:= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{ik} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

Bemerkungen

- Das Matrixprodukt AB ist nur dann definiert, wenn A genau so viele Spalten hat wie B Zeilen.
- Informell gilt für die beteiligten Matrixgrößen immer $(n \times m)(m \times k) = (n \times k)$.
- In AB ist $(AB)_{ij}$ die Summe der multiplizierten $i$ten Zeilen von A und $j$ten Spalten von B.
- Zum Berechnen von $(AB)_{ij}$ für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ geht man also wie folgt vor:
    1. Man legt in Gedanken die Tranposition der $i$ten Zeile von A über die $j$te Spalte von B.
    2. Weil A genau m Spalten hat und B genau m Zeilen hat, gibt es zu jedem Element der Zeile aus A ein korrespondierendes Element in der Spalte von B.
    3. Man multipliziert die korrespondierenden Elemente miteinander.
    4. Die Summe dieser Produkte ist dann der Eintrag mit Index ij in AB.
- Die Multiplikation von Matrizen ist im Allgemeinen nicht kommutativ (also meist $AB \neq BA$).

Beispiel

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ seien definiert als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Wir wollen $C := AB$ und $D := BA$ berechnen.

Mit $n = 2, m = 3$ und $k = 2$ wissen wir schon, dass $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, weil

$$(2 \times 3)(3 \times 2) = (2 \times 2) \tag{21}$$

und

$$(3 \times 2)(2 \times 3) = (3 \times 3) \tag{22}$$

Es gilt hier also sicher $AB \neq BA$.

Beispiel (fortgeführt)

Es ergibt sich zum einen

$$
\begin{aligned}
C &= AB \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 + 3 + 0 & 4 + 0 + 0 \\ 4 - 6 + 5 & 2 + 0 + 15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Operationen

Beispiel (fortgeführt)

```
# Definitionen
A = matrix(c(2,-3,0,
             1, 6,5),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c( 4,2,
             -1,0,
              1,3),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)

# Matrixmultiplikation
C = A %*% B
print(C)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]   11    4
> [2,]    3   17
```

Beispiel (fortgeführt)

Es ergibt sich zum anderen

$$
\begin{aligned}
D &= BA \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 2\cdot 1 & 4\cdot(-3) + 2\cdot 6 & 4\cdot 0 + 2\cdot 5 \\ (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1 & (-1)\cdot(-3) + 0\cdot 6 & (-1)\cdot 0 + 0\cdot 5 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot(-3) + 3\cdot 6 & 1\cdot 0 + 3\cdot 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8+2 & -12+12 & 0+5 \\ -2+0 & 3+0 & 0+0 \\ 2+3 & -3+18 & 0+15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 15 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{24}
$$

Beispiel (fortgeführt)

```
# Definitionen
A = matrix(c(2,-3,0,
             1, 6,5),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c( 4,2,
             -1,0,
              1,3),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)

# Matrixmultiplikation
D = B %*% A
print(D)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]   10    0   10
> [2,]   -2    3    0
> [3,]    5   15   15
```

```
# Beispiel für eine undefinierte Matrixmultipliation
E = t(A) %*% B       # (3 x 2)(3 x 2)
```

```
> Error in t(A) %*% B: nicht passende Argumente
```

Theorem (Matrixmultiplikation und Skalarprodukt)

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\langle x, y \rangle = x^T y. \tag{25}$$

Weiterhin seien für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ für $i = 1, ..., n$

$$\bar{a}_i := (a_{ji})_{1 \le j \le m} \in \mathbb{R}^m \tag{26}$$

die Spalten von A^T und für $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ für $i = 1, ..., k$

$$\bar{b}_j := (b_{ij})_{1 \le j \le m} \in \mathbb{R}^m \tag{27}$$

die Spalten von B, also

$$A^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ und } B = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times k}. \tag{28}$$

Dann gilt

$$AB = \left(\langle \bar{a}_i, \bar{b}_j \rangle \right)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le k} \tag{29}$$

Bemerkungen

- Der Eintrag $(AB)_{ij}$ enstpricht dem Skalarprodukt von $i$ter Spalte von A^T und $j$ter Spalte von B.
- Die erste Aussage folgt mit der Identifikation von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$
- Wir verzichten auf einen ausführlichen Beweis.

Operationen

Motivation für Begriff der Inversen einer quadratischen Matrix

- Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$, A und b seien als bekannt vorausgesetzt, x sei unbekannt.
- Zum Beispiel sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$
- In diesem Fall gilt $Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 1x_1 + 2x_2 & = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 & = 11 \end{array}$
- Wir haben also ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.
- Wir stellen uns vor, dass wissen möchten, für welche(s) x das LGS erfüllt ist.
- Wären $A = a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, also $ax = b$ gegeben so würden mit dem *multiplikativem Inversen* von a multiplizieren, also dem Wert, der mit a multipliziert 1 ergibt und durch $a^{-1} = \frac{1}{a}$ gegeben ist.
- Dann würde nämlich gelten $ax = b \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Leftrightarrow 1 \cdot x = a^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$
- Konkret etwa $2x = 6 \Leftrightarrow 2^{-1}2x = 2^{-1}6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}6 \Leftrightarrow x = 3$.
- Analog möchte mit dem *multiplikativen Inversen* A^{-1} von A multiplizieren können, sodass "$A^{-1}A = 1$".
- Dann hätte man nämlich $Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$
- Die Idee des multiplikativen Inversen wird im folgenden als *Inverse eine quadratischen Matrix* formalisiert.

Definition (Einheitsmatrix)

Die Matrix

$$I_n := (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

mit $a_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$ heißt *n-dimensionale Einheitsmatrix*.

- I_n wird in R mit dem Befehl `diag(n)` erzeugt.

Theorem (Neutrales Element der Matrixmultiplikation)

I_n ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation, d.h. es gilt für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dass

$$I_n A = A \text{ und } AI_m = A. \tag{31}$$

Beweis

Es sei $B = (b_{ij}) = I_n A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann gilt für alle $1 \le i \le n$ und alle $1 \le j \le n$

$$d_{ij} = 0 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \cdots + 0 \cdot a_{i-1,j} + 1 \cdot a_{ij} + + \cdots + 0 \cdot a_{i+1,j} + 0 \cdot a_{nj} = a_{ij} \tag{32}$$

und analog für AI_m. □

Definition (Invertierbare Matrix und inverse Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, wenn es eine quadratische Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \tag{33}$$

ist. Die Matrix A^{-1} heißt die *inverse Matrix von* A.

Bemerkungen

- Invertierbarkeit und inverse Matrizen beziehen sich nur auf quadratische Matrizen.
- Inverse Matrizen heißen auch einfach *Inverse*.
- Quadratische Matrizen können, müssen aber nicht invertierbar sein.
- Nicht invertierbare Matrizen nennt man *singuläre* Matrizen
- Für $A = a \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{a}$.
- Die Definition sagt nur aus, was eine inverse Matrix ist, nicht wie man sie berechnet.

Beispiel für eine invertierbare Matrix

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit inverser Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

wovon man sich durch Nachrechnen überzeugt.

Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix

Die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, denn wäre B invertierbar, dann gäbe es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Das würde aber bedeuten, dass $0 = 1$ in $\mathbb{R}$ und das ist ein Widerspruch. Also kann B nicht invertierbar sein.

Operationen

Berechnen inverser Matrizen

- 2×2 bis etwa 5×5 Matrizen kann man prinzipiell per Hand invertieren.
- Dazu lernt man im BSc Mathematik verschiedene Verfahren.
- Wir verzichten auf eine Einführung in die Matrizeninvertierung per Hand.
- Ein kurzes (30 min) Erklärvideo findet sich hier.
- In der Anwendung werden Matrizen standardmäßig numerisch invertiert.
- Matrixinversion ist ein weites Feld in der numerischen Mathematik.
- Es gibt sehr viele Algorithmen zur Invertierung invertierbarer Matrizen.
- Elegant berechnet man inverse Matrizen in R zum Beispiel mit dem Paket `matlib`.

Berechnen inverser Matrizen

```r
# Einmalige Installation des R Pakets matlib
install.packages("matlib")
```

```r
# Laden der matlib Funktionen
library(matlib)

# Definition
A = matrix(c(2,1,
             3,4),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)

# Berechnen von A^{-1}
inv(A)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]  0.8 -0.2
> [2,] -0.6  0.4
```

Berechnen inverser Matrizen

```
print(inv(A) %*% A)
```

```
>          [,1] [,2]
> [1,] 1.00e+00    0
> [2,] 2.22e-16    1
```

```
print(A %*% inv(A))
```

```
>          [,1] [,2]
> [1,] 1.00e+00    0
> [2,] 4.44e-16    1
```

```
# Nicht-invertierbare Matrizen sind auch numerisch nicht-invertierbar (singulär)
B = matrix(c(1,0,
             0,0),
           nrow  = 2,
           byrow = 2)
inv(B)
```

```
> Error in Inverse(X, tol = sqrt(.Machine$double.eps), ...): X is numerically singular
```

Definition

Operationen

Determinanten

Rang

Spezielle Matrizen

Selbstkontrollfragen

Definition (Determinante)

Für $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n > 1$ sei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ die Matrix, die aus A durch Entfernen der $i$ten Zeile und der $j$ten Spalte entsteht. Dann heißt die Zahl

$$\det(A) := a_{11} \quad \text{für } n = 1 \tag{36}$$

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det\left(A_{1j}\right) \quad \text{für } n > 1 \tag{37}$$

die *Determinante von* A.

Bemerkungen

- Für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{38}$$

  ergeben sich zum Beispiel

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \tag{39}$$

- Determinanten sind nichtlineare Abbildungen der Form $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$

Theorem (Determinanten von 2×2 und 3×3 Matrizen)

(1) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (40)$$

(2) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (41)$$

Bemerkungen

- Für 2×2 und 3×3 Matrizen (und nur für diese) gilt die *Sarrusche Merkregel*

  "Summe der Produkte auf den Diagonalen minus Summe der Produkte auf den Gegendiagonalen"

- Bei 3×3 Matrizen bezieht sich die Merkregel auf das Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad (42)$$

Determinanten

Beweis

Für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt nach Definition

$$
\begin{aligned}
\mathsf{det}(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det\left(A_{1j}\right) \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(A_{12}) \\
&= a_{11}\det((a_{22})) - a_{12}\det((a_{21})) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned} \tag{43}
$$

Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt nach Definition und mit der Formel für Determinanten von 2×2 Matrizen

$$
\begin{aligned}
\mathsf{det}(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det\left(A_{1j}\right) \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\det\left(A_{1j}\right) + a_{12}(-1)^{1+2}\det\left(A_{12}\right) + a_{13}(-1)^{1+3}\det\left(A_{13}\right)) \\
&= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) \\
&= a_{11}\det\left(\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) - a_{12}\det\left(\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right) + a_{13}\det\left(\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right) \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Determinanten

Beispiel 1

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Dann ergeben sich

$$\det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5. \tag{46}$$

und

$$\det(B) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0. \tag{47}$$

Beispiel 2 Es sei

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Dann ergibt sich

$$\det(C) = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6 \tag{49}$$

Determinanten

```r
# Beispiel 1
A = matrix(c(2,1,                      # Matrixdefinition
             3,4),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)
det(A)                                 # Determinantenberechnung
```

```
> [1] 5
```

```r
B = matrix(c(1,0,                      # Matrixdefinition
             0,0),
           nrow = 2,
           byrow = TRUE)
det(B)                                 # Determinantenberechnung
```

```
> [1] 0
```

```r
# Beispiel 2
C = matrix(c(2,0,0,                    # Matrixdefinition
             0,1,0,
             0,0,3),
           nrow = 3,
           byrow = TRUE)
det(C)                                 # Determinantenberechnung
```

```
> [1] 6
```

Theorem (Rechenregeln für Determinanten)

(Determinantenmultiplikationssatz.) Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{50}$$

(Transposition.) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det(A) = \det\left(A^T\right). \tag{51}$$

(Inversion.) Für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)} \tag{52}$$

(Dreiecksmatrizen.) Für Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i > j$ oder $a_{ij} = 0$ für $j > i$ gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{53}$$

Bemerkungen

- Wir verzichten auf einen Beweis.
- Bei Dreiecksmatrizen sind alle Elemente unterhalb $(i > j)$ oder oberhalb $(j > i)$ der Diagonalen 0
- Bei I_n sind alle nicht-diagonalen Elemente 0 und alle diagonalen Elemente 1, also folgt $\det(I_n) = 1$.

Theorem (Invertierbarkeit und Determinante)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dann und nur dann invertierbar, wenn gilt, dass $\det(A) \neq 0$. Es gilt also

$$A \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ und} A \text{ ist nicht invertierbar} \Leftrightarrow \det(A) = 0. \tag{54}$$

<u>Beweisandeutung</u>

Wir zeigen lediglich, dass aus der Invertierbarkeit von A folgt, dass $\det(A)$ nicht null sein kann. Nehmen wir also an, dass A invertierbar ist. Dann gibt es eine Matrix B mit $AB = I_n$ und mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I_n) = 1. \tag{55}$$

Also kann $\det(A) = 0$ nicht gelten, denn sonst wäre $0 = 1$.

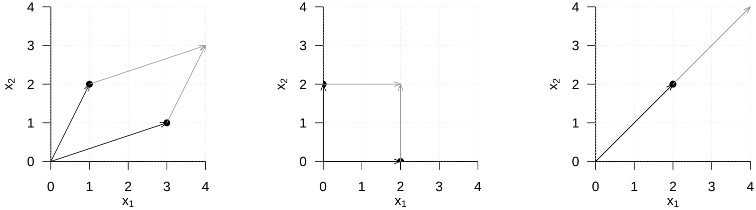
□

Visuelle Intuition

$a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ seien die Spalten von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$\Rightarrow \det(A)$ entspricht dem signierten Volumen des von $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\det(A_1) = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 \qquad \det(A_2) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 \qquad \det(A_3) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

Definition

Operationen

Determinanten

Rang

Spezielle Matrizen

Selbstkontrollfragen

Rang

Überblick

- Der Rang einer Matrix ist eine Zahl an der bestimmte Eigenschaften der Matrix abgelesen werden können.
- In dieser Hinsicht ist der Rang einer Matrix sehr ähnlich zur Determinante einer Matrix.
- Viele Resultate in der linearen Algebra beruhen auf Annahmen über den Rang einer Matrix.
- Der Rang einer Matrix ist ein tiefgehendes Konzept, das wir hier nur oberflächlich behandeln können.
- Für ausführlichere Einführungen, siehe z.B. Searle (1982), Chapter 6 und Strang (2009), Kapitel Chapter 3.2.
- Wir verwenden hier einen Zugang über das Konzept der linearen Unabhängigkeit von Vektoren.
- Wir erinnern zunächst an dieses Konzept.

Definition (Lineare Unabhängigkeit)

V sei ein Vektorraum. Eine Menge $W := \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ von Vektoren in V heißt *linear unabhängig*, wenn die einzige Repräsentation des Nullelements $0 \in V$ durch eine Linearkombination der $w \in W$ die triviale Repräsentation

$$0 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_n w_n \text{ mit } a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \tag{56}$$

ist. Wenn die Menge W nicht linear unabhängig ist, dann heißt sie *linear abhängig*.

Bemerkungen

- Prinzipiell müsste man für jede Linearkombination der $w \in W$ prüfen, ob sie Null ist.
- Die beiden folgenden Theoreme zeigen, dass es auch einfacher geht.

Theorem (Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren)

V sei ein Vektorraum. Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind linear abhängig, wenn einer der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen Vektors ist.

Beweis

v_1 sei ein skalares Vielfaches von v_2, also

$$v_1 = \lambda v_2 \text{ mit } \lambda \neq 0. \tag{57}$$

Dann gilt

$$v_1 - \lambda v_2 = 0. \tag{58}$$

Dies aber entspricht der Linearkombination

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \tag{59}$$

mit $a_1 = 1 \neq 0$ und $a_2 = -\lambda \neq 0$. Es gibt also eine Linearkombination des Nullelementes, die nicht die triviale Repräsentation ist, und damit sind v_1 und v_2 nicht linear unabhängig.

Theorem (Lineare Abhängigkeit einer Menge von Vektoren)

V sei ein Vektorraum und $w_1, ..., w_k \in V$ sei eine Menge von Vektoren in V. Wenn einer der Vektoren $w_i, i = 1, ..., k$ eine Linearkombination der anderen Vektoren ist, dann ist die Menge der Vektoren linear abhängig.

Beweis

Die Vektoren $w_1, ..., w_k$ sind genau dann linear abhängig, wenn gilt, dass $\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0$ mit mindestens einem $a_i \neq 0$. Es sei also zum Beispiel $a_j \neq 0$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} a_i w_i + a_j w_j \tag{60}$$

Also folgt

$$a_j w_j = - \sum_{i=1, i \neq j}^{n} a_i w_i \tag{61}$$

und damit

$$w_j = -a_j^{-1} \sum_{i=1, i \neq j}^{n} a_i w_i = - \sum_{i=1, i \neq j}^{n} (a_j^{-1} a_i) w_i \tag{62}$$

Also ist w_j eine Linearkombination der $w_i, i = 1, ..., k$ mit $i \neq j$. $\square$

Definition (Rang einer Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, ..., a_n := \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{63}$$

seien die *Spalten(vektoren)* von A. Dann ist *der Rang von* A, geschrieben als rg(A) definiert als die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spalten(vektoren) von A. Ist die Anzahl der maximal linear unabhängigen Spalten(vektoren) von A gleich m, so sagt man, dass A *vollen Spaltenrang hat*.

Bemerkungen

- Die Spalten einer Matrix werden hier als Vektoren in $\mathbb{R}^n$ verstanden.
- Die Definition macht keine Aussage darüber, wie der Rang einer Matrix zu bestimmen ist.
- Es gibt verschiedene Algorithmen um den Rang einer Matrix zu bestimmen, wir vertiefen dies nicht.

Rang

Beispiele

(1) Es sei

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Dann ist sind die Spaltenvektoren keine skalaren Vielfachen voneinander und damit linear unabhängig. Es gilt also $\text{rg}(X) = 2$.

(2) Es sei

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Dann ist sind die Spaltenvektoren skalare Vielfache voneinander. Die maximale Möglichkeit aus den Spaltenvektoren linear unabhängige Vektoren auszuwählen ist also 1. Die maximale Anzahl an linear unabhängigen Vektoren der Matrix ist als 1 und es gilt $\text{rg}(X) = 1$.

Bemerkungen

- In Beispiel (2) gerät die Definition des Rangs einer Matrix wie hier gegeben an ihre Grenze.
- Alternative Definitionen, z.B. über die Dimension des Spaltenraumes sind eindeutiger, aber tiefgehender.
- Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix.

Range

Beispiele

```r
# Bestimmung des Matrixrangs in R über QR Zerlegung (https://de.wikipedia.org/wiki/QR-Zerlegung)
# Beispiel (1)
X  = matrix(c(1,0,                              # Matrixdefinition
              0,1,
              0,0),
            nrow = 3,
            byrow = TRUE)
rg = qr(X)$rank                                 # Rangevaluation
print(rg)                                       # Ausgabe
```

```
> [1] 2
```

```r
# Beispiel (2)
X  = matrix(c(1,2,                              # Matrixdefinition
              1,2,
              0,0),
            nrow = 3,
            byrow = TRUE)
rg = qr(X)$rank                                 # Rangevaluation
print(rg)                                       # Ausgabe
```

```
> [1] 1
```

Rang

Bemerkungen

- Wir werden einige Aussagen zum Rang einer Matrix für die ALM Theorie benötigen.
- Wir geben diese Aussagen hier nur an, beweisen sie aber nicht.
- Für Beweise verweisen wir auf die einschlägige Literatur

Theoreme zum Rang einer Matrix

(1) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.
(2) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $\text{rg}(A) < n \Leftrightarrow A$ ist nicht invertierbar.

Definition

Operationen

Determinanten

Rang

Spezielle Matrizen

Selbstkontrollfragen

Spezielle Matrizen

Definition (Nullmatrizen, Einheitsmatrizen, Einheitsvektoren, Einsvektoren)

- Wir bezeichnen *Nullmatrizen* mit

$$0_{nm} := (0)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ und } 0_n := (0)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n \quad (66)$$

- Wir bezeichnen die *Einheitsmatrix* mit

$$I_n := (i_{jk})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit } i_{jk} = 1 \text{ für } j = k \text{ und } i_{jk} = 0 \text{ für } j \ne k \quad (67)$$

- Wir bezeichnen die *Einheitsvektoren* $e_i, i = 1, ..., n$ mit

$$e_i := (e_{i_j})_{1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } e_{i_j} = 1 \text{ für } i = j \text{ und } e_{i_j} = 0 \text{ für } i \ne j \quad (68)$$

- Wir bezeichnen den *Einsvektor* mit

$$1_n := (1)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n \quad (69)$$

Bemerkungen

- 0_{nm} und 0_n bestehen nur aus Nullen.
- I_n besteht nur aus Nullen und Diagonalelementen gleich Eins.
- $e_i, i1, ..., n$ besteht nur aus Nullen und einer Eins in der $i$ten Komponente.
- 1_n besteht nur aus Einsen.

Definition (Symmetrische, diagonale, und orthogonale Matrizen)

- Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt dass $S^T = S$.
- Eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Diagonalmatrix*, wenn $d_{ij} = 0$ für $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$.
- Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, wenn ihre Spaltenvektoren wechselseitig *orthonormal* sind.

Bemerkungen

- Eine Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen $d_1, ..., d_n$ schreibt man auch als $D = \text{diag}(d_1, ..., d_n)$.
- Symmetrische, diagonale, und orthogonale Matrizen haben viele "gute" Eigenschaften.
- Zum Beispiel überzeugt man sich einfach davon, dass Multiplikation einer Matrix A von links mit einer Diagonalmatrix D der Multiplikation der Zeilen der Matrix A mit den entsprechenden Diagonaleinträgen von D entspricht. Die entsprechende Multiplikation von rechts entspricht der Multiplikation der Spalten von A mit entsprechenden Diagonaleinträgen von D.
- Eine weitere im Folgenden wichtige Eigenschaft von Diagonalmatrizen ist
  - $D := \text{diag}(d_1, ..., d_n)$ ist eine Diagonalmatrix $\Rightarrow \det(D) = \prod_{i=1}^n d_i$.

Definition (Positiv-definite Matrix)

Eine quadratische Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv-definit (p.d.), wenn

- C eine symmetrische Matrix ist und
- für alle $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$ gilt, dass $x^T C x > 0$ ist.

Bemerkungen

- Im ALM Kontext sind p.d. Matrizen für die Definition der multivariaten Normalverteilungen grundlegend.
- Wir werden einige Aussagen zu positiv-definiten Matrizen für die ALM Theorie benötigen.
- Wir halten dieses Aussagen hier ohne Beweis fest und verweisen für Beweise auf die einschlägige Literatur

(1) Jede positiv-definite Matrix ist invertierbar.
(2) Die Inverse einer positiv-definiten Matrix ist ebenfalls positiv-definit.

Definition

Operationen

Determinanten

Rang

Spezielle Matrizen

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie Definition einer Matrix wieder.
2. Nennen Sie sechs Matrixoperationen.
3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.
4. Geben Sie die Definition der Skalarmultiplikation für Matrizen wieder.
5. Geben Sie die Definition der Matrixtransposition wieder.
6. Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ und } c := 2 \tag{70}$$
Berechnen Sie
$$D := c\left(A - B^T\right) \text{ und } E := (cA)^T + B. \tag{71}$$
per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.
7. Geben Sie die Definition der Matrixmultiplikation wieder.
8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Prüfen Sie, ob folgende Matrixprodukte definiert sind, und wenn ja, geben Sie die Größe der resultierenden Matrix and
$$ABC, \quad ABC^T, \quad , A^TCB^T \quad , BAC \tag{72}$$

Selbstkontrollfragen

9. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{73}$$

   Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$AB, \qquad B^T A^T, \qquad \left(B^T A^T\right)^T, \qquad AC \tag{74}$$

   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

10. Invertieren Sie die Matrizen A und B aus der vorherigen Aufgabe mithilfe von matlib::inv und überprüfen Sie die Inverseeigenschaft der inversen Matrizen mithilfe von R.

11. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \in \mathbb{R}^2$ wieder.

12. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1 \le i,j \le 3} \in \mathbb{R}^3$ wieder.

13. Berechnen Sie die Determinanten von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C := \text{diag}(1, 2, 3) \tag{75}$$

   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Selbstkontrollfragen

14. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.
15. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.
16. Geben Sie die Definition einer orthogonalen Matrix wieder.
17. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten Matrix wieder.
18. Geben Sie die Definition des Rangs einer Matrix wieder
19. Wann sagt man, dass eine Matrix vollen Spaltenrang hat?
20. Bestimmen Sie dien Rang folgender Matrizen durch überlegen und mithilfe von R

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

References

Searle, Shayle. 1982. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. Wiley-Interscience.
Strang, Gilbert. 2009. *Introduction to Linear Algebra*.